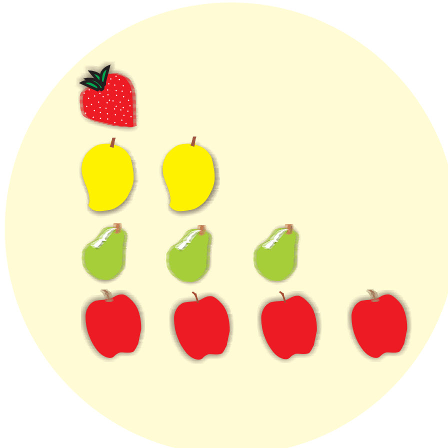
हिन्दी अंक 2 नवम्बर, 2010

लर्निंग कर्व

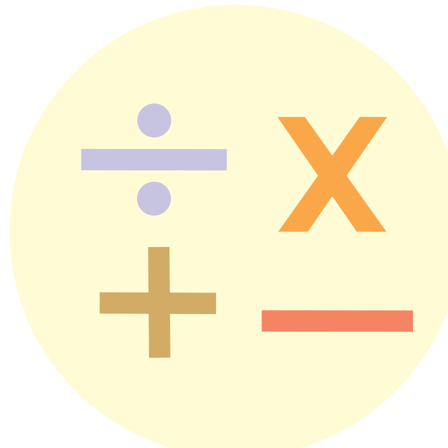
Azim Premji Foundation

अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन की पत्रिका

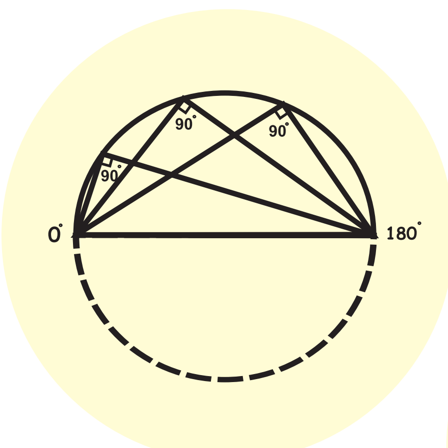
(केवल निजी प्रसार के लिए)

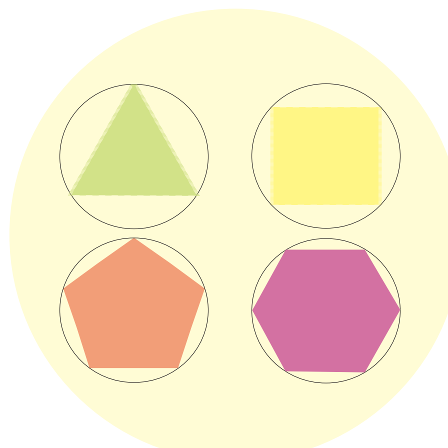


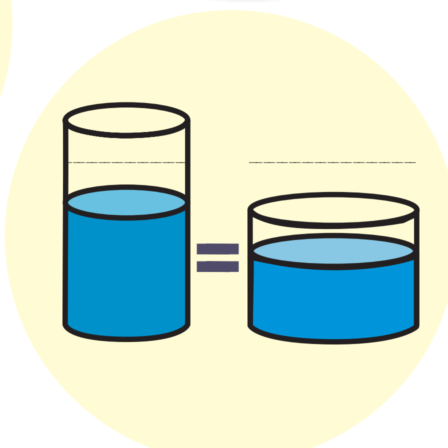
	8	12	
14			2
	10	6	
4		9	16



स्कूल के गणित पर विशेष अंक







इस अंक में

और भी बहुत कुछ....

लर्निंग कर्व

स्कूल का गणित

हिन्दी अंक 2 नवम्बर, 2010

(लर्निंग कर्व–स्पेशल इश्यू ऑन स्कूल मैथमैटिक्स (अँग्रेजी) *XIV* मार्च,2010 पर आधारित)

सम्पादकीय टीम

डी डी करोपाडी, मधुमिता सुधाकर, नीरजा राघवन, निधि तिवारी, एस. गिरिधर
तथा उमाशंकर पेरीओडी

इस अंक के सलाहकार

हृदयकांत दीवान, एन. वेणु तथा रोहित धनकर

अँग्रेजी से हिन्दी अनुवाद

सत्येन्द्र त्रिपाठी, भरत त्रिपाठी

हिन्दी अंक सम्पादन

राजेश उत्साही, अनंत गंगोला, विपिन चौहान

कार्टून

बलराज के एन
सम्पर्कः balrajkn@gmail.com

डिजायन

दानेश, प्राजेश, शुभांगी, सैम
Adroit Human Creative Services Pvt. Ltd.,
E-mail: contact@adroithuman.com

मुद्रक

प्रगति प्रिंटर्स
बंगलौर – 560 103

टिप्पणीः इस अंक में प्रकाशित लेख मूलतः लर्निंग कर्व (अंग्रेजी) के अंक XIV मार्च, 2010 प्रकाशित लेखों के अनुवाद हैं। लेखों में व्यक्त विचार तथा मत लेखकों के अपने हैं। अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन का उनसे सहमत होना आवश्यक नहीं है।

सम्पादक की ओर से



लर्निंग कर्व का गणित पर केन्द्रित यह विशेषांक आपके सामने प्रस्तुत करते हुए मैं हर्षित हूँ। किसी विशेष विषय को समर्पित अंकों की संख्या में यह तीसरी कड़ी है, ऐसे पिछले दो अंक विज्ञान तथा भाषा ज्ञान पर केन्द्रित थे। जैसा कि आप जानते हैं लर्निंग कर्व मूलतः अँग्रेजी में प्रकाशित होती है। उसका हिन्दी अनुवाद प्रकाशित करने की हमारी योजना रही है। विज्ञान शिक्षण अंक का अनुवाद प्रकाशित हो चुका है। गणित विशेषांक के कुछ चुने हुए लेख हम यहाँ प्रस्तुत कर रहे हैं।

गणित पर इस विशेषांक को सुगठित स्वरूप देने की प्रक्रिया हमारे लिए भी सीखने का एक अमूल्य अनुभव रही है। विज्ञान तथा भाषा के विशेषांकों से अलग इस बार हमें उन तमाम प्रबल भावों का सामना करना भी जरूरी लगा जो 'गणित' शब्द के उल्लेख से ही विद्यार्थियों के मन पर छा जाते हैं – भय, घृणा, आतंक से लेकर चरम प्रेम और उल्लास तक। ऐसे विषयांश, जिन्हें हम पहले स्वतः स्पष्ट समझते थे, विचार करने पर उतने स्पष्ट और सुबोध साबित नहीं हुए। अंक में जाने वाली प्रस्तुतियों के चयन और विचार–विमर्श की प्रक्रिया में इस विषय पर हमारी अपनी दृष्टि भी स्पष्ट, विस्तृत और विकसित हुई है।

हमेशा की तरह, हमने इस अंक की सामग्री के लिए श्रेष्ठ विद्वानों से अनुरोध किया और उनके उदार सहयोग के लिए हम अतिशय ऋणी हैं। उनमें से प्रत्येक ने हमारी कठोर समय–सीमाओं को सहन करते हुए उत्साहपूर्वक अपना योगदान दिया। एक सहयोगी विद्वान ने, जो कभी विनोद करने से नहीं चूकते, मुझसे कहा कि बेहतर होगा कि मैं अपने पत्रों के नीचे प्रचलित 'निष्ठापूर्वक आपका' की बजाय 'दुराग्रहपूर्वक आपका' लिखने लगूँ।

हमें आशा है कि हर लेख आपमें विचारों की कोई झंकार उठाएगा, उदाहरण के लिए, जहाँ एक ओर एक लेख गणित की प्रकृति पर ही विमर्श करता है, वहीं एक अन्य उसके इतिहास की यात्रा पर ले जाता है। इसी तरह एक इसकी अध्यापन–कला का वर्णन करता है तो दूसरा इसके बारे में शिक्षक के गहरे अन्तर्बोध और उसके दृष्टिकोण में हमें साझीदार बनाता है।

विद्यार्थियों के लिखे लेखों को पढ़ना भी अत्यन्त ज्ञानवर्धक अनुभव था क्योंकि उनसे हमने जाना कि उनके मन–मस्तिष्क में क्या कुछ चलता है जब वे गणित से जूझते हुए उससे अपना निजी रिश्ता बनाते हैं।

लगभग 20 वर्ष पहले, मैं दिल्ली में अपनी बेटी को किण्डरगार्टेन कक्षा में प्रवेश दिलवाने के लिए उसके साथ गया था। शुरू की औपचारिक बातों के बाद प्रधानाध्यापिका ने बच्ची से पूछा कि एक बड़ा होता है या दो। उसने तुरन्त कहा एक। इस पर उस स्नेही महिला ने अपनी दोनों हथेलियाँ फैलाकर उन पर रखी चॉकलेटें दिखाकर बच्ची से पूछा कि उसे एक चाहिए या दो ? जब बच्ची ने दो ले लीं तो उन्होंने फिर अपना मूल सवाल दोहराया। क्या एक बड़ा है या दो। एक, बच्ची ने दृढ़तापूर्वक फिर कहा। उन प्रधानाध्यापिका को मैं हमेशा इसका श्रेय दूँगा कि उन्होंने तत्काल बच्ची को प्रवेश दे दिया। और, लगता है कि जैसे बीते वर्षों में कुछ भी नहीं बदला है, क्योंकि पिछले दिनों अखबार पलटते हुए मेरा ध्यान एक कार्टून पट्टी पर गया, जिसमें शिक्षक प्रतीत होने वाला एक व्यक्ति एक बच्चे से पूछ रहा था, ''यदि चार सेब मेरे इस हाथ में हों और चार उस हाथ में तो मेरे पास क्या होगा?'' इस पर बच्चा उत्तर देता है, ''सचमुच बड़े हाथ!'' जो बहुत सटीक है।

लर्निंग कर्व पर आपकी प्रतिक्रियाएँ हमारे लिए सबसे अधिक महत्वपूर्ण हैं। जहाँ आपका प्रोत्साहन हमारे लिए टॉनिक की तरह है, वहीं आपकी प्रतिक्रियाओं से हमें अपने आनेवाले संस्करणों को बेहतर बनाने में निरन्तर मदद मिलती है।

एस. गिरिधर
कार्यक्रम तथा एडवोकेसी प्रमुख,
अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन

विषय–सूची

स्कूल का गणित

हिन्दी अंक 2 नवम्बर, 2010

खण्ड अ : व्यापक मुद्दे









खण्ड ब : कुछ परिप्रेक्ष्य









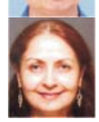






खण्ड स : कक्षा में







खण्ड द : कुछ गणितीय अनुभव

खण्ड इ : किताब चर्चा और स्रोत सामग्री

खण्ड अ

व्यापक मुद्दे

1

गणित में आनन्द की संस्कृति

शशिधर जगदीशन



भूमिका

चाहे हम इसे पसन्द करें या नहीं पर यह प्रतीत होता है कि गणित हमारे जीवन के हर पक्ष में व्याप्त है। चाहे किसान हो या कोई तकनीकी व्यक्ति, गणित के साथ एक सहज नाता और कम से कम उस स्तर की योग्यता जिस स्तर पर व्यक्ति उसका उपयोग करता है, एक समतावादी समाज के लिए आवश्यक है। कुछ लोग यह भी कह सकते हैं कि भले ही स्कूल में सीखे गए गणित की विषयवस्तु भूल जाएँ फिर भी विद्यार्थी गणितीय तर्कप्रक्रिया के अपने अनुभव के द्वारा स्पष्ट और तार्किक ढंग से सोचने (जीवन के लिए अनिवार्य कौशल) की क्षमता को बनाए रख पाएँगे। यहाँ अन्तर्निहित मान्यता यह है कि गणित सीखना न सिर्फ हमें अपनी रोज़मर्रा की जिन्दगी में मदद करेगा बल्कि हमारे जीवन की गुणवत्ता भी इससे बेहतर होगी। कैसी विडम्बना है कि अधिकांश लोगों के लिए गणित के साथ उनका अनुभव इस मान्यता के बिलकुल विपरीत रहा है। दुनिया भर में गणित के शिक्षा की दशा के बारे में विलाप करते हुए काफी कुछ लिखा जा चुका है, और 'मैथफोबिया' (गणित का भय) शब्द सामान्य बातचीत का हिस्सा बन चुका है। बच्चों के स्कूल छोड़ देने के पीछे एक बड़ा कारण गणित को न सम्हाल पाना होता है। यह एक जाना–माना तथ्य प्रतीत होता है कि कई विद्यार्थी गणित से डरते हैं और भय खाते हैं। खेद की बात यह है कि यह भावना बड़ी उम्र तक बनी रहती है।

गणित की शिक्षा में सुधार करने के लिए कई प्रयास किए गए हैं। इस हेतु बहुत सारा धन भी लगाया गया है। दुर्भाग्यवश, सुधारों की मंशा संदिग्ध रही है और मेरी राय में यह समस्या का एक हिस्सा है। विकसित राष्ट्र इस डर से अपने नागरिकों की गणितीय योग्यता को और बेहतर बनाना चाहते हैं कि विरोधी राष्ट्रों के नागरिक उनसे बेहतर प्रदर्शन कर रहे हैं। उदीयमान राष्ट्र अपनी गणितीय शिक्षा को इसलिए बेहतर बनाना चाहते हैं ताकि वे एक 'ज्ञान–आधारित समाज' की रचना कर सकें। बाज़ार की दुनिया में ज्ञानवान व्यक्तियों को बड़ी सम्पदा माना जाता है। लेकिन ऐसा प्रतीत होता है कि इन प्रेरणाओं पर आधारित सुधारों ने गणितीय शिक्षा पर लम्बी अवधि में कोई खास प्रभाव नहीं डाला है (हालाँकि बीच में, स्पूतनिक भय के चलते अमरीका में थोड़े समय के लिए 'बुनियादी विज्ञान का स्वर्णिम युग' आया था)।

यदि हमें इन दोनों समस्याओं, यानि कमज़ोर गणितीय योग्यता और मैथफोबिया (गणित से भय), को सुलझाने के सम्बन्ध में कोई प्रगति करना है, तो पहले हमें कई प्रश्नों की तह में जाना होगा। गणित की प्रकृति क्या है और हमारे कुछ खास पूर्वाग्रह पाठ्यक्रम की रूपरेखा को किस प्रकार प्रभावित करते हैं? गणित के साथ विद्यार्थियों और शिक्षकों का नाता किस तरह का है? गणित के बारे में विद्यार्थियों और शिक्षकों की भ्रान्तियाँ या मान्यताएँ क्या हैं? और सम्भवतः सबसे महत्वपूर्ण प्रश्न है, वे कौन–से कारक हैं जो मनुष्यों को सीखने के लिए प्रेरित करते हैं।

इस लेख में मैं इस तरह की विवेचना प्रारम्भ करने की आशा करता हूँ। उसके लिए पहले मैं लोगों द्वारा गणित को देखे जाने और अनुभव किए जाने के तमाम तरीकों का वर्णन करूँगा। ये दृष्टिकोण अलग–थलग ढंग से लागू किए जाने पर पाठ्यक्रम को कैसे प्रभावित कर सकते हैं, इसे भी सामने लाऊँगा। इसके बाद यह देखने के लिए कि क्या हम वाकई गणित का आनन्द लेने की ऐसी संस्कृति रच सकते हैं जो सिर्फ कुछ सम्भ्रान्त लोगों के लिए न होकर सर्वसमाज के लिए हो, मैं पाठ्यक्रम रचना तथा अध्यापन के तरीकों पर नजर डालूँगा।

नेत्रहीन लोग और गणित

हम सभी, नेत्रहीन लोगों और हाथी की प्रसिद्ध जातक कथा से परिचित हैं। प्रत्येक व्यक्ति हाथी के अलग–अलग अंग को छूता है, और फिर वे हाथी की व्याख्या दीवार से लेकर रस्सी तक कई भिन्न रूपों में करते हैं। ठीक इसी तरह गणित भी आंशिक दृष्टियों से पीड़ित है। शायद गणित का रहस्य, उसकी गहराई और सम्पन्नता इस तथ्य से उजागर होती है कि उसे इतने सारे अलग ढंगों से देखा जा सकता है। आइए इनमें से कुछ दृष्टियों पर नजर डालें और देखें कि कैसे वे पाठ्यक्रम के स्वरूप और शिक्षण को प्रभावित करती हैं।

लेखा–विद्या के रूप में गणित : अधिकांश लोगों के लिए गणित हिसाब–किताब का समानार्थी शब्द है। शायद यह कहना अनुचित नहीं होगा कि अधिकांश लोग कीमतों की तुलना करने में, यह सुनिश्चित करने में कि कहीं उन्हें बाकी रेज़गारी वापस दिए जाने के मामले में धोखा तो नहीं दिया जा रहा है, और शायद ब्याज दरों, रियायतों और छूटों की गणना करने में गणित का इस्तेमाल करते है। कुछ लोग क्षेत्रफल और आयतन की

गणना में भी कर सकते हैं। कुछ ज्यादा सीखे हुए लोग इसका इस्तेमाल बहीखाते में कर सकते हैं। यह भी सही है कि अंकगणित में कई खोजें सम्भवतः ज़मीन के दस्तावेज और व्यापार का हिसाब–किताब रखने की जरूरत से हुई हैं। इसके जो उदाहरण दिमाग में आते हैं वे हैं प्राथमिक त्रिकोणमिति और मापनकला जो कि नील घाटी में खेती की जमीनों की गणना करने की जरूरत से प्रेरित थी। सम्भवतः हिन्दू–अरबी संख्या व्यवस्था की खोज की प्रेरणा बहीखातों में इस्तेमाल करने की जरूरत की बजाय खगोलशास्त्र में बड़ी–बड़ी गणनाएँ करने की जरूरत से मिली। पर निश्चित ही, इस खोज का, जिसे 'मनुष्यों के महानतम बौद्धिक कमालों' में से एक माना जाता है, वाणिज्य के क्षेत्र में बहुत गहरा असर रहा है। अधिकांश लोगों के लिए गणित का मतलब है अंकगणित और संख्याओं का हेरफेर करना।

यदि यह किसी का गणित के साथ एकमात्र अनुभव है तो वह पाठ्यक्रम की रचना व गणित का शिक्षण इस तरह करेगा जैसे कि वह बस सवालों को हल करने की विधियों का विज्ञान भर हो जिससे यांत्रिक गणनाएँ की जाती हैं। इस वजह से यह काम उसके तथा विद्यार्थियों, दोनों के लिए अरुचिकर हो जाएगा जिसके चलते वह कई विद्यार्थियों को खो देगा। सोफिया कोवालेव्सकाया इसे अद्भुत ढंग से पेश करती हैं: ''कई लोग, जिन्हें गणित के बारे में अधिक खोजने का मौका कभी नहीं मिला, इसे बस अंकगणित मान लेते हैं, और इसे शुष्क और नीरस विज्ञान के रूप में देखते हैं। जबकि, वास्तविकता में, यह ऐसा विज्ञान है जो सबसे ज्यादा कल्पनाशीलता की मांग करता है।''

सवाल हल करने वाली मानसिक कसरत के रूप में गणितः

गणित की खास विशेषताओं में से एक है सवाल हल करना। ऐसे कई लोग जो छोटी उम्र में सवाल हल करने के रोमांच को खोज लेते हैं वे बड़े होने पर व्यावसायिक गणितज्ञ बन जाते हैं। पर अगर गणित के इस पक्ष को विकृत कर दिया जाता है और उसे गलत दृष्टिकोण से देखा जाने लगता है तो यह गणित से भयभीत होने और उसके प्रति घृणा का भाव पैदा करने का स्रोत बन जाता है। चूँकि सवालों को हल करने की प्रतिभा बहुत छोटी उम्र में सामने आ जाती है अतः इस अकेली क्षमता के आधार पर बच्चों पर अक्सर 'असाधारण' और 'मन्दबुद्धि' का ठप्पा लगा दिया जाता है। जब एक शिक्षा व्यवस्था बच्चों के आत्म–मूल्य को उनकी सवाल हल करने की क्षमता से जोड़कर देखती है तो यह उन बच्चों का भी बहुत नुकसान करती है जो सवाल हल करने में दक्ष होते हैं और उनका भी जो इसमें दक्ष नहीं होते। वे बच्चे जिन्हें सवाल हल करना कठिन मालूम पड़ता है, और जिनपर 'मूर्ख' का ठप्पा लगा दिया जाता है (समाज के द्वारा या खुद के द्वारा) उनके मन में सभी तरह के गणित के प्रति भय और घृणा का भाव विकसित हो जाता है। उनकी अपनी यह छवि अक्सर उनके आत्मगौरव से जुड़कर उसे क्षति पहुँचाती है जिनसे उनमें असुरक्षा और शर्मिंदगी की भावनाएँ पनपती जाती हैं। हम सभी ऐसे कई एकदम अजनबी लोगों से मिलते हैं जिन्हें यह बात स्वीकारना बहुत जरूरी लगता है कि वे गणित में कितने ज्यादा खराब हैं। दूसरी तरफ, ऐसे लोगों के साथ, जो सवालों को हल करने में तथा गणित में दक्ष होते हैं और जिन पर अपने आप ''बुद्धिमान'' का ठप्पा लग जाता है, हमेशा यह खतरा रहता है कि वे हीन सामाजिक कौशल वाले एक आयामी व्यक्ति बनकर रह जाएँ। मैं आपको यह आसान सा अभ्यास देता हूँ कि आप अपने पसन्दीदा गणितज्ञ के बारे में सोचकर इस बात का स्पष्ट उदाहरण पा सकते हैं!

> *''वे बच्चे जिन्हें सवाल हल करना कठिन मालूम पड़ता है, और जिनपर 'मूर्ख' का ठप्पा लगा दिया जाता है (समाज के द्वारा या खुद के ही द्वारा) उनके मन में सभी तरह की गणित के प्रति भय और घृणा का भाव विकसित हो जाता है। उनकी अपनी यह छवि अक्सर उनके आत्मगौरव से जुड़कर उन्हें क्षति पहुँचाती है जिनसे उनमें असुरक्षा और शर्मिंदगी की भावनाएँ पनपती जाती हैं।''*

इसमें कोई सन्देह नहीं है कि गणितीय सिद्धान्त का बड़ा हिस्सा कठिन सवालों को हल करने की लालसा से प्रेरित होता है। फेर्मा का अन्तिम प्रमेय इसका प्रसिद्ध उदाहरण है। हालाँकि, गणित के सभी सवाल इसी ढंग के नहीं होते। कुछ सवाल जरूर बड़े गम्भीर होते हैं, और हिमनद के ऊपर दिखने वाली नोंक की तरह अपने नीचे छिपे गणित के गहरे पक्षों को उजागर करते हैं। कई सवाल तो बस दिमागी कसरत होते हैं जो अक्सर उन्हें उलटी तरफ से, अर्थात समाधानों की ओर से, हल करने का अभ्यास होते हैं, जिसमें हल करने के लिए किसी बचकानी तरकीब की जरूरत पड़ती है।

ऐसे ही सवाल हमारी अधिकांश प्रतियोगी परीक्षाओं का मुख्य

अंग होते हैं और इनका इस्तेमाल अनेक आवेदकों को कचरे की तरह अलग कर देने के लिए किया जाता है। कोई भी व्यवस्था जो शिक्षा और नौकरियों जैसे संसाधनों के अवसर बाँटने के लिए मानदण्ड के रूप में इस कसरती क्षमता का उपयोग करती हो, वह निश्चित ही एक असन्तुलित बेढंगा समाज बनाएगी। इसके प्रभाव अभी ही हमारे उच्च शिक्षा के संस्थानों में देखे जा रहे हैं। वे विद्यार्थी जिन्हें सवाल हल करने की मशीनी ज़द्दोज़हद से होकर गुजरना पड़ता है, चुक जाते हैं और उनके भीतर कुछ नया सीखने की चाहत नहीं रह जाती। ऐसे विद्यार्थियों का गणित के प्रति दृष्टिकोण बहुत संकुचित होता है और उनमें से बहुत थोड़े ही कार्यक्षेत्र की तरह से गणित के शोध और शिक्षण को चुनेंगे। मैंने वरिष्ठ प्राध्यापकों और प्रशासकों को इस तथ्य के बारे में अफ़सोस करते सुना है कि भारत में नए खुले कई प्रतिष्ठित संस्थानों में गणित पढाने हेतु सक्षम लोग ढूँढना बहुत मुश्किल बात है। उन कई हजार विद्यार्थियों के भाग्य के बारे में ज़रा सोचिए जो कई सालों की तैयारी के बाद भी तथाकथित स्तरीय शिक्षा पाने की स्थिति तक नहीं पहुँच सके। टूटे मन और घायल आत्मविश्वास के साथ किस तरह की पढ़ाई हो सकती है? इसके अलावा हमारे समाज ने बुद्धिमत्ता और गणितीय क्षमता के बीच जो तादात्म्य बना दिया है उसके चलते कला के विषयों को आगे पढ़ने की इच्छा रखने वालों के लिए शिक्षा की दशा निराशाजनक हो गई है क्योंकि विज्ञान की शिक्षा के लिए असन्तुलित रूप से अधिक धन उपलब्ध कराया जा रहा है। कई ऐसे छात्र भी, जिनकी विज्ञान के विषयों में कोई खास रुचि नहीं है और जो शायद दूसरे क्षेत्रों में बहुत प्रतिभावान हैं, विज्ञान की पढ़ाई ही कर रहे हैं।

'ब्रम्हाण्ड की भाषा' और आधुनिक समाज के एक उपयोगी औजार के रूप में गणित :

गैलिलियो के बाद गणित को ब्रम्हाण्ड की भाषा के रूप में देखा जाने लगा। जो लोग ब्रम्हाण्ड के रहस्यों को सुलझाना चाहते हैं वे ब्रम्हाण्ड को समझने के लिए गणित को छठी इन्द्रिय के रूप में देखते हैं। हम भी भौतिकशास्त्री यूजीन विग्नर, जिन्होंने 1959 में एक व्याख्यान दिया था जिसका शीर्षक था 'प्राकृतिक विज्ञानों में गणित की अतिशय प्रभावशीलता', के साथ इस पर चमत्कृत होते हैं। विग्नर अपने व्याख्यान का अन्त यह कहकर करते हैं, ''भौतिक शास्त्र के नियमों के सूत्रीकरण के लिए गणित की भाषा की उपयुक्तता का चमत्कार एक अद्भुत पुरस्कार है जिसे हम न तो समझते हैं और न ही हम इसके पात्र हैं। हमें इसके लिए आभारी होना चाहिए और आशा करना चाहिए कि वह भविष्य के शोधों के लिए भी मान्य रहेगी और इसका विस्तार शिक्षा की व्यापक शाखाओं तक हो जाएगा, चाहे वह अच्छा हो या बुरा, हमें आनन्दित करे या सम्भवतः हमें और भी बेबूझ लगे।'' ऐसे अनेक लोग जो विज्ञान के ज्यादा सैद्धान्तिक पक्षों का अध्ययन करते हैं, गणित के इसी 'चमत्कारी' पक्ष की ही सबसे ज्यादा सराहना करते हैं।

> *''क्रियाकलापों के मॉडल बनाने की अपनी असाधारण क्षमता के चलते गणित का हमारी जिन्दगियों के सभी पहलुओं पर तथा जीवविज्ञान से लेकर अर्थशास्त्र तक अध्ययन के कई क्षेत्रों पर बहुत गहरा असर हुआ है।''*

क्रियाकलापों के मॉडल बनाने की अपनी असाधारण क्षमता के चलते गणित का हमारी जिन्दगियों के सभी पहलुओं पर तथा जीवविज्ञान से लेकर अर्थशास्त्र तक अध्ययन के कई क्षेत्रों पर बहुत गहरा असर हुआ है। मॉडल बनाने की इस क्षमता ने गणित को व्यापारियों से लेकर इंजीनियरों तक तमाम तरह के लोगों के लिए एक उपयोगी औजार भी बना दिया है। हममें से अधिकांश लोग आजकल कम्प्यूटरों का उपयोग करते हैं पर हमें इस बारे में कुछ भी पता नहीं होता कि कम्प्यूटर कैसे काम करते हैं, और इसी प्रकार व्यवसायी लोग गणित का औजार की तरह उपयोग करते हैं और उन्हें इसका कोई अनुमान नहीं होता कि यह औजार क्यों काम कर जाता है। गणित के बारे में ऐसे दृष्टिकोण, जो यह माँग करता हो कि उसकी उपयोगिता का हमेशा प्रदर्शन किया जाए, का भी गणित के पाठ्यक्रमों और उसके शिक्षण पर विपरीत असर पड़ेगा। मुश्किल यह है, कि बहुत थोड़ा स्कूली गणित ही ऐसा होता है जो कि छात्रों को वास्तविक अर्थों में प्रयुक्त होता हुआ दिखाया जा सके। ज्यादातर तो इसके उदाहरण अवास्तविक और अर्थहीन होते हैं। इसके अलावा, ऐसा रवैया भी, जो यह कहता हो कि ''मैं कोई चीज तभी सीखूँगा जब वह उपयोगी हो'', 'सही अर्थों में सीखने' के रास्ते में आ जाता है। गणित को लेकर इस तरह का उपयोगवादी रवैया जिसके लाभ बाद में मिलना हों, और वर्तमान में यांत्रिक और अर्थहीन गणनाएँ करते जाना हों, विद्यार्थियों को कतई प्रेरित नहीं कर सकता। इससे गणित उबाऊ हो जाता है और उसका चंचल और आनन्ददायी पक्ष खो जाता है। जैसा कि जूलियन रिचर्ड ने कहा है, ''एक औसत विद्यार्थी भावनात्मक

और बौद्धिक संतोष अभी चाहता है, न कि पाँच या दस साल के समय में जबकि वह वयस्क हो चुका होगा।''

सत्य और सुन्दरता की तरह गणित : अब हम गणित के गूढ़ विवरणों में प्रवेश करते हैं। सभी शुद्ध गणितज्ञ, जो वाकई में निष्णात हैं, यही कहेंगे कि वे गणित इसलिए करते हैं क्योंकि गणित बहुत सुन्दर है। यदि वे प्लेटोवादी होंगे तो वे यह भी कह सकते हैं कि वे 'गणितीय सत्य' की खोज में हैं, कुछ ऐसा जो खोजा जाना हो न कि आविष्कृत किया जाना। सभी शुद्ध गणितज्ञों के प्रवक्ता जी.एच. हार्डी से बेहतर और कौन इस भाव को व्यक्त कर सकेगा? ''एक गणितज्ञ, किसी चित्रकार या फिर कवि की भाँति ही संरचनाएँ बनाता है। यदि उसकी संरचनाएँ चित्रकारों और कवियों की संरचनाओं से ज्यादा स्थायी होती हैं तो इसलिए क्योंकि उसकी संरचनाएँ विचारों से निर्मित होती हैं।'' वे आगे कहते हैं, ''गणितज्ञ की संरचनाएँ, चित्रकार या फिर कवि की संरचनाओं की तरह ही खूबसूरत होना चाहिए; उसके विचार, रंगों या शब्दों की ही भाँति सुसंगत ढंग से समाहित होने चाहिए। सुन्दरता पहला परीक्षण हैः कुरूप गणित के लिए दुनिया में कोई स्थायी जगह नहीं है।''

पर मेरी राय में, गणित में आगे बढ़ने के लिए सबसे बड़ी प्रेरणा भावनात्मक स्तर पर अनुभव की जाती है। सभी गणितज्ञ, चाहे गणित की प्रकृति के प्रति उनकी दृष्टि जो भी हो, इस बात पर सहमत होंगे कि गणित की रचना की प्रक्रिया में उन्हें 'पूरे मस्तिष्क में प्रकाश के फैलने' जैसा अनुभव होता है। फील्ड्स मैडल (गणित के क्षेत्र में पाया जा सकने वाला उच्चतम पुरस्कार) विजेता एलेन कॉन्स इस अनुभूति को इस तरह समझाते हैंः ''पर जैसे ही प्रकाश होता है, वह हमारी सम्वेदना पर इस तरह से छा जाता है कि तब निष्क्रिय या उदासीन रह पाना असम्भव हो जाता है। उन बिरले मौकों पर जब मैंने वास्तव में इसे अनुभव किया है, मैं अपनी आँखों में आँसू आने से नहीं रोक सका।''

कहा जाता है कि गणित किसी सृजनात्मक कला विधा के सदृश्य है और इस तथ्य को केवल वे लोग ही सच में समझते हैं जिन्होंने गणित को खोजने का मादक आनन्द लिया है। यह बात ऐसे अधिकांश लोगों को (मुझे भी) सबसे ज्यादा आकर्षित करती है, जो गणित का अध्ययन सिर्फ उसके आनन्द के लिए करते हैं न कि उसके उपयोगों या दूसरे पहलुओं के लिए जैसा कि ऊपर वर्णित किया गया है। समय–समय पर गणितज्ञों ने इस बात का रोना रोया है कि चूँकि शिक्षक और छात्र गणित के इस स्वभाव को सही में समझते नहीं हैं; इसीलिए उसका पाठ्यक्रम और शिक्षण विकृत हो गया है।

पर, उस दृष्टिकोण की भी सीमाएँ हैं जो यह कहता है कि सभी गणितीय अनुभव कला और संगीत के अनुभवों के समान होते हैं। कला और संगीत की सुन्दरता अधिकांश मनुष्यों को अपेक्षाकृत आसानी से उपलब्ध हो जाती हैं, पर गणित की सुन्दरता देखने के लिए उससे एक अनूठा सम्बन्ध होना चाहिए और पर्याप्त प्रशिक्षण होना चाहिए। स्कूली गणित के अधिकांश हिस्से का ढाँचा अक्सर इतना समृद्ध नहीं होता कि वह अपनी सुन्दरता दिखा सके; बल्कि स्कूल के वर्षों में तो सवालों को हल करने की प्रक्रिया ही बच्चों को गणित की तरफ आकृष्ट करती है। यदि गणित कला का ही एक रूप है तो फिर सभी बच्चों को गणित सीखने के लिए बाध्य क्यों करना चाहिए? यदि हम गणित के प्रति शुरुआती प्रतिक्रियाओं के आधार पर उसे वैकल्पिक बना देते हैं, तो क्या हम बच्चों के प्रति अपनी जिम्मेदारी को निभा रहे हैं? चूँकि सौन्दर्य बोध रुचि की बात है तो क्या हमें शिक्षकों को सिर्फ उन्हीं की पसन्द के अनुसार पाठ्यक्रम रचने देना चाहिए? निश्चित ही इससे उनके सारे के सारे छात्रों की रुचियाँ भी सन्तुष्ट नहीं होंगी, उनके द्वारा गणित का उपयोग दूसरे विषय सीखने की बुनियाद के रूप में करने या फिर आजीविका अर्जन के लिए करने की बात तो छोड़ ही दें।

> *''यदि हम इस बात पर ज़ोर दें कि गणित सभी विद्यार्थियों के लिए केन्द्रीय पाठ्यक्रम में शामिल रहे तो हमें इसे भी एक मौलिक अधिकार बना देना चाहिए कि सभी बच्चे गणित सीखने में आनन्द लें!''*

और फिर यह सवाल भी है कि आखिर समाज क्यों गणितीय गतिविधि की मदद करे। अधिकांश कलाकारों को अपने कला के काम के लिए संरक्षकों या खरीदारों की जरूरत होती है। गणितज्ञ आजीविका के लिए अपने प्रमेय नहीं बेचते। ईमानदारी की बात यह है कि नीति–निर्धारकों के गणित को एक उपयोगी औजार की तरह देखने के कारण ही इस क्षेत्र में मौजूद अधिकांश लोग अपनी आजीविका कमाने में समर्थ होते हैं। वे या तो गणित पढ़ाते हैं या गणित 'करते' हैं, जो ऐसा विषय है जिसे आजीविका के लिए उपयोगी माना जाता है। अपने ही आनन्द के लिए गणित करने वाले थोड़े से लोगों को ही आर्थिक सहारा दिया जाता है।

सभी के लिए गणित?

यदि हम इस बात पर ज़ोर दें कि गणित सभी विद्यार्थियों के लिए केन्द्रीय पाठ्यक्रम में शामिल रहे तो हमें इसे भी एक मौलिक अधिकार बना देना चाहिए कि सभी बच्चे गणित सीखने में मजा लें। कर्नाटक शैली के एक प्रसिद्ध संगीतकार ने मुझसे एक बार कहा था कि कुछ वर्ष पूर्व कर्नाटक संगीत पुनरोत्थान के एक बड़े दौर से गुजरा है। इसका श्रेय कई युवा संगीतकारों को जाता है जिन्होंने रसिकों का एक बड़ा आधार तैयार किया और उसे बढ़ाया। इन युवा लोगों ने चेन्नई और पूरे दक्षिण भारत के सैकड़ों अन्य छोटे कस्बों और गाँवों में सभा संस्कृति को फिर से जीवित किया। युवा और बुजुर्ग, शौकीन और प्रवीण, सभी तरह के संगीतकारों के लिए अब सराहना करने वाले श्रोता मौजूद हैं, और वे एक अच्छी आजीविका हासिल कर सकते हैं।

क्या हम भी गणित का आनन्द लेने की संस्कृति बना सकते हैं? निश्चित ही अब तक चर्चा की गई समस्याओं का यही एक समग्र समाधान है। यह तभी हो सकता है जब इससे जुड़े सभी लोग वाकई में गणित करने, उसके उपयोग और उसे सीखने के आनन्द और रोमांच के भाव को महसूस कर सकें। मौजूदा स्थिति में तो यह एक आदर्शवादी, अव्यावहारिक स्वप्न प्रतीत होता है – नीरस पाठ्यक्रम, अपर्याप्त और खराब आधारभूत सुविधाएँ, अधूरे तैयार शिक्षक (पॉल लॉकहार्ट का कहना हैः ''गणितज्ञ बच्चों को पढ़ाने के प्रति उत्सुक नहीं हैं और शिक्षक गणित करने में उत्सुक नहीं हैं''), और भय और घबराहट की संस्कृति का व्याप्त होना, अभी यही स्थिति है जहाँ तक गणित का सवाल है। पर सभी क्रान्तियों की तरह बदलाव की शुरुआत व्यक्तिगत आधारभूत तथा व्यवस्थागत, दोनों ही स्तरों पर होना चाहिए।

व्यवस्थागत स्तर पर हमें गणितीय क्षमता को बुद्धिमत्ता से अलग करके देखना होगा। हमें हर बच्चे की यह खोजने में मदद करना होगा कि उसे वाकई में क्या अच्छा लगता है, पर साथ ही उन्हें उन चीजों को पसन्द करना भी सिखाना होगा जो वे कर रहे हों। हमें शिक्षा और नौकरियों जैसे संसाधनों तक पहुँच के लिए सवाल हल करने के दकियानूसी कौशलों का मुख्य मानदण्ड के रूप में उपयोग करना बन्द करना होगा। हमें अपने युवाओं की योग्यताओं और कौशलों का आकलन करने के लिए एक ज्यादा व्यापक आधार विकसित करने की जल्द से जल्द जरूरत है। मैं मानकों को कमज़ोर करने का सुझाव नहीं दे रहा हूँ। मैं मूल्यांकन के एक व्यापक आधार वाली व्यवस्था की माँग कर रहा हूँ जो मानवीय बुद्धिमत्ता के विविध पहलुओं को, जवाबदेह होने की क्षमता को और संवेदनशील तथा जिम्मेदार मनुष्य होने के दुर्लभ गुण को ध्यान में रखे। इस क्षेत्र में होने वाला क्रान्तिकारी बदलाव गणित के प्रति होने वाली सांस्कृतिक घबराहट को जड़ से उखाड़ देगा।

पाठ्यक्रम के स्तर पर, हमें गणित शिक्षा के लिए अपने लक्ष्यों के बारे में स्पष्ट होने की जरूरत है। जो न्यूनतम बात हम चाहेंगे वह है कि सभी बच्चे गणना करने में समर्थ हों, उनके पास आँकड़े एकत्रित करने और प्रस्तुतिकरण की पर्याप्त जरूरी समझ हो ताकि वे झूठे प्रचार के बहकावे में न आ पाएँ। उनके पास यह तार्किक क्षमता हो कि वे झूठे तर्कों की पहचान कर सकें। कुछ लोगों के लिए लक्ष्य होगा गणित का औजार की तरह उपयोग करने की योग्यता; उससे भी कम लोगों की संख्या के लिए लक्ष्य होगा नया गणित रचना (सृजनशील गणितज्ञ बिरले ही किसी व्यवस्था का योजनाबद्ध नतीजा होते हैं – वे तो किसी भी व्यवस्था के बावजूद गणित की तरफ मुड़ते हैं क्योंकि वे गणित के अलावा कुछ और कर ही नहीं सकते!)।

एनसीएफ 2005 में रेखांकित गणितीय पाठ्यचर्या रूपरेखा एक बहुत अच्छा दस्तावेज है और उसमें काफी गहराई से बहुत स्पष्ट दिशा–निर्देश दिए गए हैं। लेकिन, इस समय हमें तुरन्त ही गणितज्ञों, शिक्षकों और शैक्षिक मनोवैज्ञानिकों के विचार–समूह की जरूरत है जो इन उद्देश्यों को ध्यान में रखते हुए शिक्षण–सामग्री तैयार कर सकें। हमें सृजनात्मक तरीकों से गणनाएँ करना सिखाना होगा ताकि इन कौशलों को निखारा जा सके और आगे बढ़ाया जा सके। चूँकि इनका इस्तेमाल रोजमर्रा की व्यावहारिक परिस्थितियों में किया जाएगा अतः इन कौशलों का मूल्यांकन ऐसे प्रॉजेक्टों और खेलों के द्वारा किया जाना चाहिए जो कि जीवन से जुड़ी परिस्थितियों के अनुरूप हों, न कि तनावपूर्ण परीक्षाओं के द्वारा। चूँकि गणित अक्सर अपने से ही और विकसित होता जाता है अतः अवधारणाओं को फिर से देखा जाना चाहिए पर ऐसा पुराने तरीकों के बजाय सृजनात्मक तरीकों से किया जाना चाहिए। पूरा पाठ्यक्रम इस दर्शन से भरा हुआ होना चाहिए कि गणित 'नियमित संरचनाओं की पहचान का विज्ञान' है। हमें इस बात का भी खास ख्याल रखना जरूरी है कि संरचना की पहचान का आकलन किस तरह होता है। मैंने ऐसे कई छात्र देखे हैं जो पारम्परिक पाठ्यपुस्तकीय गणित में अच्छे प्रतीत नहीं होते पर उनकी त्रिआयामी आकाश की समझ बहुत गहरी होती है और वे संरचनाओं को पहचानने में तथा तार्किक पहेलियों को सुलझाने में काफी दक्ष होते हैं। बच्चों को अर्थपूर्ण सवालों को हल करने का पर्याप्त अनुभव होना चाहिए और एक अन्तर्दृष्टि पाने के

रोमांच का अनुभव भी मिलना चाहिए। इन सब जरूरतों को पूरा करने वाली पहले से तैयार कोई भी सामग्री बाजार में उपलब्ध नहीं है। जैसा कि मैंने पहले कहा है यह तुरन्त ही जरूरी है कि हम अलग से संसाधनों को निर्धारित करके इस तरह की सामग्री की रचना करें, या कम से कम सुसंगत ढंग से संग्रहीत करें, और शिक्षकों को प्रशिक्षित करें ताकि वे उसका और बेहतर ढंग से इस्तेमाल कर सकें।

कक्षा के स्तर पर यह बेहद जरूरी है कि शिक्षक 'वाकई में सीखने' का वातावरण पैदा करे। कक्षा को ऐसी जगह बनाने के लिए शिक्षक और छात्रों के बीच विश्वास और प्रेम का सम्बन्ध होना चाहिए। शिक्षक को भी गणित करने में बहुत आनन्द आना चाहिए तभी उसके छात्र प्रेरित महसूस करेंगे। इससे भी ज्यादा जरूरी है कि उसे बच्चों की इस बात को समझने में मदद करना चाहिए कि उनके डर क्या हैं और सीखने के प्रति उनका विरोधी रुख क्यों है। उन्हें इस काबिल बनाना चाहिए कि वे अपनी खुद की पढ़ाई की जिम्मेदारी ले सकें। सेन्टर फॉर लर्निंग में शिक्षा के बीस सालों के अनुभव ने हमें यह सिखाया है कि ये सब सिर्फ रूमानी ख्वाब नहीं हैं बल्कि बहुत वास्तविक सम्भावनाओं के दायरे में आते हैं।

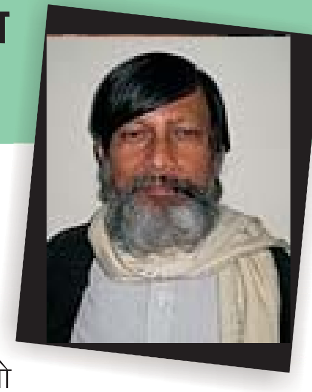
पढ़ने योग्यः लेखक का सुझाव

1. John D. Barrow, Pi in the Sky- Counting, Thinking, and Being, Clarendon Press, Oxford, 1992.
2. Jean-Pierre Changeux and Alain Connes, Conversations on Mind, Matter, and Mathematics, Princeton University Press, 1995.
3. Keith Devlin, Lockhart's lament -The Sequel, MAA, Devlin's Angle, May 2008, http://www.maa.org/devlin/devlin_05_08.html
4. Philip J. Davis and Reuben Hersh, The Mathematical Experience, Penguin Books, 1980.
5. Timothy Gowers, Mathematis: A Very Short Introduction, Oxford University Press, 2002.
6. G.H. Hardy, A Mathematician's Apology, Canto Books, Cambridge University Press, 1992.
7. Shashidhar Jagadeeshan, The Nature of Mathematics - an Unfolding Story, Journal of the Krishnamurti Schools, July 2005,Volume 9.
8. Shashidhar Jagadeeshan, On Creating the Right Atmosphere to Teach and Learn Mathematics, Presentation at NCME 2005, New Delhi.
9. Paul Lockhart, A Mathematician's Lament, MAA, Devlin's Angle, March 2008, http://www.maa.org/devlin/devlin_03_08.html10. Davi Mumford, Calculus Reform -For the Millions, Notices of the AMS 44 (1997), 559-563.
10. Mathematics Curriculum in the National Curriculum Framework 2005, NCERT New Delhi.
11. M.S. Raghunathan, The Queen of Sciences: Her Realm, Her Influence and Her Health, 18th Kumari L.A. Meera Memorial Lecture, 2009.
12. William P Thurston, Mathematical Education, Notices of the AMS 37 (1990), 844-850.
13. E.P. Wigner, The unreasonable effectiveness of Mathematics in the natural sciences, Commun.
14. Pure Appl.Math., 1960, 13.

जे. शशिधर *ने 1994 में सिराक्यूज विश्वविद्यालय से अपनी पीएचडी पूरी की। वे 23 सालों से गणित पढ़ा रहे हैं और उन्होंने शिक्षकों के लिए एक स्रोत पुस्तक ''मैथअलाइव!'' लिखी है। उन्हें युवा लोगों के साथ काम करना और उनसे संवाद करना अच्छा लगता है। वे बंगलौर स्थित सेन्टर फॉर लर्निंग के लिए सीनियर स्कूल प्रोग्राम विकसित कर रहे हैं। उनसे jshashidhar@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

2 गणित की प्रकृति और स्कूली शिक्षा से उसका सम्बन्ध

अमिताभ मुखर्जी



पृष्ठभूमि

सभी स्कूली विषयों में गणित ऐसा है जिसका दर्जा अनोखा –पर अन्तर्विरोधी – है। एक तरफ, इसे स्कूली शिक्षा का एक अत्यावश्यक अंश माना जाता है। कक्षा 1 से ही शुरू करके कक्षा 10 तक इसे अनिवार्य विषय के रूप में पढ़ाया जाता है। इसे अक्सर एक प्रकार की कसौटी माना जाता है जिसके अनुसार : वही व्यक्ति शिक्षित है जिसे गणित आता हो। दूसरी तरफ, यह स्कूली विषयों में सबसे डरावना भी माना जाता है, और इसकी वजह से विद्यार्थियों में भय और असफलता का भाव व्याप्त रहता है। उन वयस्क लोगों को भी, जिन्होंने स्कूली दौर सफलतापूर्वक पार कर लिया है, यह कहते हुए सुना जा सकता है: ''मैं स्कूल में कभी भी गणित ठीक से नहीं समझ पाया।'' (जब हममें से कुछ लोगों ने 1992 में दिल्ली विश्वविद्यालय के विज्ञान शिक्षा और संचार केन्द्र में स्कूल मैथेमैटिक्स प्रॉजेक्ट शुरू किया तो हमारा मकसद इस भय का इलाज करना था। हालिया स्थिति के लिए आप गणित शिक्षण पर गठित नेशनल फोकस ग्रुप के पोज़ीशन पेपर को इस यूआरएल पर पढ़ सकते हैं http://www.ncert.nic.in/html/pdf/schoolcurriculum/position_papers/Math.pdf)

ऊपर वर्णित विरोधाभास कई सवाल पैदा करता है। इनमें से कुछ हैं, गणित क्या है और हमें इसे स्कूल में क्यों पढ़ाना चाहिए? क्या स्कूली गणित के साथ आने वाली समस्या का सम्बन्ध गणित की प्रकृति से, या उसे पढाए जाने के ढंग से है, या फिर दोनों ही बातों से उसका कुछ लेना–देना है? क्या सभी बच्चे किसी खास स्तर तक गणित पढ़ सकते हैं? स्कूल में हमें किस तरह का गणित पढ़ाना चाहिए? और कैसे पढ़ाना चाहिए?

ऊपर के सभी सवालों के जवाब देने का प्रयास करना महत्वाकांक्षी बात हो सकती है, शायद दुःसाहसी भी। इस लेख में मैं स्कूली गणित के बारे में पिछले पाँच दशकों में आए कुछ बदलावों पर, तथा पिछले कुछ सालों में भारत में दिखे उनके प्रभावों पर ध्यान दूँगा।

सभी के लिए गणित

स्कूली गणित के बारे में किसी भी समकालीन चर्चा में प्राथमिक शिक्षा के सार्वभौमिकीकरण (यूईई) के सन्दर्भ को ध्यान में रखना जरूरी है। आज, यूईई किसी दूर के सपने की बजाय एक हासिल किया जा सकनेवाला लक्ष्य प्रतीत होता है। मील का अगला पत्थर सार्वभौमिक माध्यमिक शिक्षा (यूएसई) भी निश्चित ही आने वाले दशक में शैक्षणिक कार्यसूची का प्रमुख हिस्सा बनेगा। अतः जब हम स्कूली गणित की बात करते हैं तो हम ऐसी चीज की बात कर रहे होते हैं जो सभी स्कूली बच्चों के प्रति सम्बोधित है।

क्या सभी लोग गणित सीख सकते हैं? पचास साल पहले इसका उत्तर स्पष्ट रूप से 'नहीं' रहा होता। आज भी, हम वयस्क लोगों को कुछ बच्चों के बारे में यह कहते सुन सकते हैं कि वे 'कभी भी गणित नहीं सीख सकेंगे'। यूईई/यूएसई की अपेक्षाएँ किस तरह से इसका उत्तर देती हैं, इस बाबत, ऊपर वर्णित पोजीशन पेपर अपना स्पष्ट मत देता है जिसमें कहा गया है:

> *''उत्कृष्ट गणितीय शिक्षा का हमारा दृष्टिकोण दो मान्यताओं पर आधारित है कि **सभी बच्चे गणित सीख सकते हैं और सभी बच्चों को गणित सीखना चाहिए।** इसलिए यह अत्यावश्यक है कि हम सभी बच्चों को सबसे अच्छे स्तर की गणितीय शिक्षा प्रदान **करें।**''*

इसके बाद प्रश्न यह उठता है कि किस तरह की गणितीय शिक्षा सभी बच्चों की जरूरतों को पूरा करेगी? इस बात का उत्तर देने के लिए हमें गणित की शिक्षा के उद्देश्यों के बारे में कुछ स्पष्टता हासिल करना जरूरी है।

> *''यह जानते हुए कि सभी बच्चे आठवीं कक्षा तक (और शायद दसवीं तक भी) गणित पढ़ने वाले हैं, स्कूली गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य गणितज्ञ पैदा करना नहीं हो सकता।''*

स्कूल की गणितीय शिक्षा का उद्देश्य

यह जानते हुए कि सभी बच्चे आठवीं कक्षा तक (और शायद दसवीं तक भी) गणित पढ़ने वाले हैं, स्कूली गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य गणितज्ञ पैदा करना नहीं हो सकता। और इसी तरह यह वैज्ञानिक या इंजीनियर पैदा करने में भी मददगार नहीं हो

सकता, हालाँकि इन क्षेत्रों के सन्दर्भ में गणित का बहुत महत्वपूर्ण और खास स्थान है। फिर स्कूली गणितीय शिक्षा का उद्देश्य क्या है? पोजीशन पेपर कहता है:

> *सीधे कहें तो, एक ही मुख्य लक्ष्य है– बच्चे की विचार प्रक्रियाओं का गणितीकरण।*

दूसरे शब्दों में, लक्ष्य है दुनिया के बारे में गणित की भाषा में सोचना सीखना, और इस तरह की सोच विकसित करना जो कि ठेठ गणितीय हो। दूसरी तरफ, पिछले पाँच दशकों से देश में चल रहे पाठ्यक्रमों और पाठ्यपुस्तकों को देखने पर कुछ अलग ही बात सामने आती है। ऐसा प्रतीत होता है कि 'विश्वविद्यालयीन शिक्षा' या शायद 'आईआईटी शिक्षा' का स्कूली गणित की विषयवस्तु और शैली पर प्रभुत्व रहा है। अतः कोई आश्चर्य नहीं कि अतीत में स्कूल गए और वर्तमान में स्कूल जा रहे अधिकांश विद्यार्थियों के मन में इस विषय के लिए कोई प्यार नहीं है!

गणित आखिर है क्या?

यदि गणित शिक्षा का मुख्य लक्ष्य सोच का गणितीयकरण करना है, तो हमारी इस बात पर थोड़ी सहमति होना जरूरी है कि आखिर गणित किस–किस चीज से निर्मित होता है। यदि आप किसी आम व्यक्ति से यह सवाल पूछें कि ''गणित क्या है?'' तो ज्यादा सम्भावना है कि आपको त्वरित जवाब मिलेंगे ''जोड़ना, घटाना, गुणन, भाग देना''। (और सोचने पर या पूछे जाने पर लोग इसमें आमतौर पर बीजगणित और ज्यामिति (रेखागणित) और जोड़ देते हैं।) अंकों पर की जाने वाली ये क्रियाएँ निश्चित ही गणित का एक अहम हिस्सा होती हैं, पर सिर्फ इन्हीं से गणित को या गणितीय सोच को परिभाषित नहीं किया जा सकता। मैं कोई परिभाषा देने का प्रयास नहीं करूँगा बल्कि, मैं आपको गणितीय सोच के कुछ उदाहरण दूँगा–

''दरवाजा, मेरे और दीवार के बीच में है।''
''जार में करीब पचास टॉफियाँ हैं।''
''यह गिलास लम्बा लेकिन सँकरा है। इसमें चौड़े मग की अपेक्षा कम पानी आएगा।''
''उन्नीस और पन्द्रह होता है... बीस और पन्द्रह से एक कम... यानी चौंतीस।''
''यदि आप सड़क से जाते हैं तो आपको स्टेशन पहुँचने में करीब पन्द्रह मिनिट लगेंगे, पर एक शॉर्टकट भी है जिससे आप दस मिनिट में पहुँच जाएँगे।''

पहली बार देखने पर ऐसा लगेगा कि पहले वक्तव्य में गणितीय सोच का कोई प्रमाण नहीं दिखता। पर स्कूल–पूर्व उम्र के बच्चे के लिए स्थानिक सम्बन्ध जैसे 'से ऊपर', 'से नीचे', 'के बीच में', 'के परे' गणितीकरण का एक महत्वपूर्ण हिस्सा होते हैं।

सोच का गणितीकरण कोई पूर्ण या एक बार घटने वाली घटना नहीं है। स्कूली जीवन के दौरान और उसके बाद भी, बच्चों तथा वयस्कों का भी, गणितीयकरण होता रहता है। दूसरी तरफ, हमारे पाठ्यक्रमों में ऐसी कई बातें हो सकती हैं जो विद्यार्थी बिना किन्हीं संलग्न प्रक्रियाओं के सीख जाते हैं, और इसलिए वे गणित की 'असली पढ़ाई' में कोई योगदान नहीं दे पातीं। यहाँ ऐसी कुछ बातों के उदाहरण हैं, जिन्हें यदि उचित कक्षा प्रक्रियाओं का सहारा न मिले तो अन्ततः वे सब रट ली जाती हैं।

> ''किसी भी चीज़ को m/n से भाग देने के लिए आपको उसे m/n से गुणा करना पड़ता है।''
> ''a और b का लघुत्तम समापवर्त्य का मूल्य, b को a बार गुणा करने पर आने वाली संख्या को और a और b के महत्तम समापवर्तक से भाग देने पर आने वाली संख्या के बराबर होता है।''
> ''समान तल और ऊँचाई वाले सभी त्रिभुजों का क्षेत्रफल समान होता है।''

अमूर्तीकरण की समस्या

छोटे बच्चे चीज़ों से खेलते हुए दुनिया के बारे में सीखते हैं। इसलिए गणित से भी उनका परिचय इसी तरीके से होता है। लेकिन गणित के साथ तो पहली कक्षा में भी अमूर्तीकरण मौजूद रहता है। स्कूली गणित के सबसे निचले स्तर से लिए गए इस वाक्य पर गौर करें:

> ''दो और दो मिलकर चार बनाते हैं।''

यह वक्तव्य दो और चार के बारे में है, जो अमूर्त तत्व हैं। साइकिल के पहियों, मोज़ों और दो सेबों में कोई चीज़ समान है: एक गुणधर्म जिसे हम 'दो–पन' कह सकते हैं। ''दो सेब और दो अन्य सेब मिलकर चार सेब बनाते हैं'', यह भौतिक दुनिया के बारे में एक वक्तव्य है, जिसका ऊपर दिए गए अमूर्त वक्तव्य के विपरीत वास्तव में परीक्षण किया जा सकता है।

मार्टिन ह्यूज़ की 1986 में आई किताब ''चिल्ड्रन ऐंड नम्बर'' में बच्चों के साथ किए गए कई वार्तालाप दर्ज हैं, जो दिखाते हैं कि बच्चों के पास स्कूल जाना शुरू करने से पहले भी ''संख्या के बारे में आश्चर्यजनक रूप से अच्छा–खासा ज्ञान होता है''। परन्तु यह ज्ञान गणित की कक्षा की औपचारिक भाषा में व्यक्त नहीं होता। हो सकता है कि एक बच्चा किसी बॉक्स में रखी ईंटों की संख्या की सही–सही गणना कर दे, और बता दे कि यदि उसमें आठ ईंटें हैं तो दो और जोड़ने से कुल दस ईंटें हो जाएँगी। पर इसी बच्चे से यह अमूर्त सवाल पूछे जाने पर उसे कुछ नहीं सूझेगा कि ''आठ और दो कितने होते हैं? ''

इस तरह के प्रयोग कई अन्य लोगों द्वारा बाद में भी किए गए हैं और उनके परिणाम भी इसी तरह के निकले हैं। कक्षाओं के लिए इनका निहितार्थ यह है कि ठोस वस्तुओं के साथ की जाने वाली गतिविधियाँ, गणितीय विषयवस्तु को व्यक्त करने के लिए आमतौर पर इस्तेमाल होने वाली औपचारिक, अमूर्त भाषा के प्रयोग से पहले की जानी चाहिए। इसके अलावा, अनौपचारिक से औपचारिक की ओर होने वाले बदलाव पर हमारी कक्षायी गतिविधियों में विशेष रूप से ध्यान दिया जाना चाहिए।

गणितीय ज्ञान की रचना

चूँकि गणित के बुनियादी तत्व अमूर्त हैं, अतः हमें यह सोचना पड़ सकता है कि क्या उनका अस्तित्व वस्तुपरक और मानव मस्तिष्क से स्वतंत्र है, या फिर वे दिमाग की ही उपज हैं। यह एक ऐसा मुद्दा है जिस पर दार्शनिक कम से कम दार्शनिक–गणितज्ञ रेने डेस्कार्टस (1596–1650) के समय से बहस करते आ रहे हैं। उदाहरण के लिए, क्या संख्याएँ वाकई में 'कहीं हैं' या वे सिर्फ हमारे दिमागों में ही होती हैं? इस विषय की अलग–अलग स्थितियों का सार बर्ट्रेंड रसेल ने अपनी बेहद पठनीय छोटी–सी किताब ''इन्ट्रोडक्शन टू मैथेमैटिकल फिलॉसोफी'' में प्रस्तुत किया है। यहाँ मैं जरा देर के लिए इस चर्चा से हटकर इस मुद्दे के थोड़े से भिन्न पहलू पर ध्यान आकर्षित करूँगा, एक ऐसा मुद्दा जो कक्षा से सीधे जुड़ा हुआ है।

पियाजे, वायगॉट्स्की व अन्य लोगों के कार्य के बाद यह बात अब सामान्यतः स्वीकृत है, कि बच्चे निष्क्रिय रूप से ज्ञान अर्जित नहीं करते। इसके बजाय, प्रत्येक विद्यार्थी सक्रिय रूप से अपने लिए ज्ञान निर्मित करता है। ज्ञान–निर्माण की प्रक्रिया में बाहरी दुनिया के साथ–साथ दूसरे लोगों के साथ मेल–मिलाप और व्यवहार शामिल रहता है। अतः इससे कोई मतलब नहीं कि गणितीय तत्वों का कोई वस्तुपरक अस्तित्व होता है या नहीं: हम सभी को उन्हें खुद के लिए निर्मित करने की प्रक्रिया से होकर गुजरना पड़ता है।

हालाँकि पियाजे को स्कूली गणित की ज्यादा परवाह नहीं थी फिर भी उनका कार्य सीधे तौर पर शुरुआती दौर की गणित की पढ़ाई को प्रभावित करता है। उदाहरण के लिए, कॉन्सटैंस कामी ने यह तर्क दिया है कि छोटे बच्चे अंकगणित को खोजते नहीं हैं बल्कि उसका पुनर्आविष्कार करते हैं। पहली बार देखने पर यह बात इस दावे के विपरीत लगेगी कि स्कूल–पूर्व की उम्र वाले बच्चों को गणित का या कम से कम संख्याओं का अच्छा–खासा ज्ञान होता है। लेकिन, इसमें कोई विरोधाभास नहीं है यदि हम इस बात पर गौर करें कि बच्चे स्कूल में दाखिल होने से पूर्व ही कई तरह के गणितीय सन्दर्भों से रूबरू हो चुके होते हैं।

क्या गणितीय ज्ञान अनोखा होता है?

इससे पहले कि हम कक्षाओं के लिए इन विचारों के तात्पर्यों की तरफ मुड़ें, हमें इस मुद्दे को तो सुलझाना ही होगा कि कौन–सा गणित पढ़ाया जाए। क्या हमारे पाठ्यक्रम के विकल्प केवल गणितीय ज्ञान के ढाँचे से ही तय होना चाहिए? यदि हाँ, तो क्या यह ढाँचा अनोखा और सार्वभौमिक है? यदि यह सवाल किसी व्यावसायिक गणितज्ञ के सामने रखा जाए तो सम्भावित उत्तर एक सुस्पष्ट 'हां' होगा। लेकिन, हमें यह जरूर याद रखना चाहिए कि गणितीय शोध समुदाय के सदस्य एक स्वपरिभाषित सीमित सामाजिक समूह हैं। जैसा कि पहले भी तर्क दिया गया है, स्कूली गणित शिक्षा का उद्देश्य विद्यार्थियों के लिए इस सम्भ्रांत समूह की सदस्यता हासिल करना नहीं हो सकता।

भारत समेत कई देशों के शोधकर्ताओं ने गणित की कई भिन्न परम्पराओं का ब्यौरा दिया है। इनमें से कुछ तो आदिवासी और अन्य पृथक समुदायों में पाई जाती हैं, जबकि 'सड़कछाप गणित' कही जाने वाली कुछ अन्य, स्कूलों में पढ़ाए जाने वाले औपचारिक गणित के साथ ही देखी जा सकती हैं। मिस्त्रियों, नलसाज़ों और अन्य कारीगरों को अक्सर उनके व्यवसाय से जुड़े हुए गणित के उनके खुद के रूपों का इस्तेमाल करते देखा जा सकता है।

गहरे स्तर पर, किसी भी जगह या समय पर गणितज्ञों के समुदाय को कार्यरत रखने वाले गणित का प्रकार उन अन्य सामाजिक समूहों द्वारा तय होता है जिनसे कि उन गणितज्ञों का सम्बन्ध होता है। जाति, भाषा, राष्ट्रीयता और धर्म के प्रभावों को दरकिनार नहीं किया जा सकता, भले ही गणितज्ञ यह मानना पसन्द करें कि वे इस तरह के प्रभावों के ऊपर और इनके परे हैं। यूक्लिड से लेकर न्यूटन से होते हुए वर्तमान समय तक रेखीय रूप से, मुख्यतः पश्चिम में, विकसित हुए गणित की तस्वीर को मिलनेवाली चुनौतियाँ आज बढ़ती ही जा रही हैं।

गणित के शिक्षण के लिए निहितार्थ

ऊपर दिए गए विचार स्वाभाविक रूप से इस बाबत कुछ निष्कर्षों की ओर ले जाते हैं कि गणित कैसे पढ़ाया जाना चाहिए। चूँकि इस अंक में गणित की अध्यापनकला पर एक लेख अलग से है अतः मैं अपनी बात संक्षेप में कहूँगा–

1. बच्चों को ऐसे सन्दर्भ दिए जाना चाहिए जिनमें गणित का सीखना सम्भव हो सके। ये सन्दर्भ 'वास्तविक जैसे' होना चाहिए, भले ही वे वास्तविक न हों।
2. शुरुआती कक्षाओं में बच्चों को ठोस वस्तुओं से खेलते हुए सीखने के पर्याप्त मौके दिए जाना चाहिए।

3. औपचारिक, प्रतीकात्मक रूप की ओर होने वाले बदलाव के प्रति खास ध्यान दिया जाना चाहिए। शुरुआती दौर में सवालों को हल करने की विधियों को नहीं सिखाया जाना चाहिए।
4. बुनियादी कौशलों को सीखना जरूरी है, पर गणितीय ढंग से सोचना और भी ज्यादा महत्वपूर्ण है।
5. विद्यार्थियों को किसी भी तरह से यह आभास नहीं कराना चाहिए कि गणितीय ज्ञान एक तैयार उत्पाद है।
6. कुल मिलाकर, शिक्षक को एक सहायक की भूमिका अदा करना चाहिए, और हरेक बच्चा सक्रिय रूप से गणित सीखने की प्रक्रिया में संलग्न होना चाहिए।

निष्कर्ष

यह प्रतीत हो सकता है कि गणित की प्रकृति से जुड़े हुए मुद्दे दर्शनशास्त्र के क्षेत्र में आते हैं, और उनका छोटी कक्षाओं में गणित को पढाए जाने के तरीके से कोई ज्यादा सम्बन्ध नहीं है। लेकिन, जैसा कि पहले भी तर्क दिया गया है, इसमें एक गहरा सम्बन्ध है। इसलिए, स्कूली गणित से जुड़े हुए लोगों – शिक्षकों, स्कूल प्रशासकों, शिक्षक–प्रशिक्षकों – के लिए यह जरूरी है कि वे यहाँ उठाए गए मुद्दों के बारे में किसी न किसी स्तर पर कुछ न कुछ जरूर करें। इसे सबसे अच्छे ढंग से कैसे किया जा सकता है, यह एक खुला प्रश्न है।

अमिताभ मुखर्जी *दिल्ली विश्वविद्यालय में भौतिक शास्त्र के प्राध्यापक हैं। वे विज्ञान शिक्षा व संचार केन्द्र (सीएसईसी) के निदेशक (2003–2009 तक) रहे हैं। वे होशंगाबाद विज्ञान शिक्षण कार्यक्रम के साथ निकट से जुड़े रहे हैं। गणित शिक्षा के साथ उनका जुड़ाव 1992 से सीएसईसी के स्कूल गणित प्रॉजेक्ट के साथ शुरू हुआ। वे 2005 में गणित शिक्षण पर गठित नेशनल फोकस ग्रुप के सदस्य भी थे। उनसे* amimukh@gmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

दिमागी कसरत

एक खेल में 10 बुद्धिमान लोग भाग ले रहे हैं। सभी दस खिलाड़ियों को एक के पीछे एक, ऐसी सीधी रेखा में खड़ा किया गया है कि सबसे अन्त में खड़ा व्यक्ति अपने आगे खड़े 9 लोगों को देख सकता है, नौंवा व्यक्ति उसके आगे खड़े सभी 8 लोगों को देख सकता है, उसके आगे वाला अपने आगे के सभी लोगों को और सबसे पहले खड़ा व्यक्ति किसी को भी नहीं देख सकता। रेखा में खड़े 10 लोगों का क्रम गेममास्टर (खेल का नियंता) द्वारा निर्धारित किया जाता है। वहाँ पर्याप्त संख्या में काले रंग की और सफेद रंग की टोपियाँ मौजूद हैं। गेममास्टर उनमें से प्रत्येक व्यक्ति के सिर पर एक–एक टोपी रख देगा। इसके बाद वह अन्तिम व्यक्ति (जो अन्य सभी को देख सकता है) से शुरू करते हुए प्रत्येक से अपने–अपने सिर पर रखी टोपी का रंग बताने को कहेगा। जवाब में खिलाड़ी या तो काली कह सकता है या सफेद, इनके अलावा और कोई अन्य जवाब नहीं दे सकता। सही जवाब देने वाले खिलाड़ी/खिलाड़ियों को पुरस्कृत किया जाएगा। सभी लोग दूसरों के जवाब सुन सकते हैं। खिलाड़ियों को खेल में शामिल होने से पहले अपनी रणनीति की योजना बनाने और आपस में चर्चा करने के लिए कुछ समय दिया जाता है (जवाब देते समय स्वर में बदलाव करना या फिर ज्यादा ऊँचा बोलना जैसी चालाकियाँ करने की अनुमति नहीं होती)। वे कौन–सी रणनीति अपनाएँ कि ज्यादा से ज्यादा लोगों को पुरस्कार मिल सके? और इस रणनीति के साथ कितने लोग निश्चित रूप से पुरस्कार जीतने के प्रति आशावान हो सकते हैं?

(संकेतः यदि 10 की बजाय 11 व्यक्ति हों तो उत्तर बदल सकता है।)

नीचे दिए स्थान को गणना के लिए उपयोग करें 🙂

3 गणित की अध्यापन कला

हृदयकांत दीवान



शुरू करने से पहले ''अध्यापन–कला (पेडागॉजी)'' शब्द के साथ गुंथे हुए कुछ मुद्दों को स्पष्ट करके उनके विस्तार में जाना जरूरी है। इस सुविधाजनक शब्द में सामान्यतः एक गठरी की तरह सब कुछ समेट लिया जाता है, पर इसके बावजूद कुछ परिस्थितियों में इसके अपने निहितार्थ पर पूरा विमर्श किया जा सकता है।

क्या ''अध्यापन–कला'' एक स्वतंत्र अवधारणा हो सकती है?

अध्यापन–कला की पहली अपेक्षा है उस विषय क्षेत्र को भलीभाँति जानना जिसके अध्यापन के सन्दर्भ में विचार हो रहा हो। यानी गणित की अध्यापन–कला पर विचार करने के लिए सबसे पहले यह जानना जरूरी है कि गणित क्या है, इसमें क्या–क्या शामिल है, यह कैसे काम करता है, इसके बाद ही हम दूसरे प्रश्नों पर जा सकते हैं। इसमें क्या शामिल है, इसका पहला सीधा जवाब है: अंकगणित और उसका व्यापकीकरण (जैसे बीजगणित), ज्यामिति, सांख्यिकी,संख्या–प्रणाली का विश्लेषण और ऐसी अन्य श्रेणियाँ। इनका वर्णन करते हुए इन्हें मात्राओं, आकारों तथा उनके रूपान्तरों के मानवीय अनुभवों को निराकार सूत्रों में बदलना, व्यवस्थित करना और उनका व्यापकीकरण करना गणित कहा जा सकता है। बाद में यह सभी विषय क्षेत्रों की निराकार और व्यापक अवधारणाएँ गढ़ने की आधार भाषा बन जाता है। अब गणित का ज्ञान और उसकी संरचनाएँ मानव समाज के परिमाणीकरण, मापन और आकाशीय आकारों की संकल्पना करने की प्रारम्भिक आवश्यकता से बहुत आगे जा चुकी हैं। एक सूक्ष्म निराकार भाषा की तरह यह विभिन्न क्षेत्रों के विचारों और अवधारणाओं को जोड़ता है। जैसे–जैसे इसका विकास हुआ है, इसने मानवीय अनुभव के विभिन्न क्षेत्रों के साझा सूत्रों को पुष्ट करने का प्रयास भी किया है।

दूसरी अपेक्षा, गणित के अन्तर्गत हम क्या सीखना–सिखाना चाहते हैं, इसे स्पष्ट रूप से व्यक्त करने की है। पहाड़े जिस तरह याद किए जा सकते हैं, वह गणित के विवरणात्मक प्रश्नों को हल करने में, या एक चर राशि की अवधारणा को समझने में विद्यार्थियों की मदद से कतई अलग है। अध्यापन–कला ज्ञान की पृथक धारा नहीं है, और न अध्यापन का विषय चुनने में वह आपकी मदद कर सकती है, यद्यपि वह आप के चुने हुए विषयों से जुड़ी हो सकती है। कभी–कभी तो उनके अनुसार संचालित भी हो सकती है, या इसका उल्टा भी हो सकता है। इनका पारस्परिक सम्बन्ध अगर देखा जा सके तो वह प्रभावशाली और महत्वपूर्ण होता है। उदाहरण के लिए आप तथाकथित रचनावाद के तरीके से रटकर पहाड़े सीखने में बच्चों की मदद नहीं कर सकते, न ही पारम्परिक व्यवहारवादी ढाँचे के अन्तर्गत बच्चों को खुली संरचनाओं की पड़ताल करना सिखा सकते हैं।

हम सीखने–सिखाने की विषयवस्तु का निर्माण कैसे करते हैं?

गणित और इसके अमूर्त चरित्र के बहुआयामी सम्बन्धों को ध्यान में रखते हुए एनसीएफ ने सुझाव दिया कि गणित के अध्यापन का एक प्रमुख लक्ष्य बच्चों की समझ का गणितीकरण होना चाहिए।

> *''प्रारम्भिक कक्षाओं के गणित के पाठ्यक्रम के दायरे में संख्याओं तथा संख्या प्रणाली को समझना और उनका इस्तेमाल करना, तुलनाओं को समझना और उन्हें मात्रात्मक ढंग से व्यक्त करना, आकारों और स्थानिक सम्बन्धों को समझना, आँकड़ों को समझकर इस्तेमाल करना आदि सब आते हैं।''*

इसका अभिप्राय यह है कि अमूर्तीकरण की प्रक्रिया द्वारा तार्किक रूप से गठित व्यापक तर्कसरणियाँ बनाने में, अपने अनुभवों को गहराई से व्यवस्थित करने में, और अलग–अलग विशेष तथा सांयोगिक घटनाओं के पार जाने में समर्थ बनने में बच्चों की सहायता करने का प्रयास किया जाना जरूरी है, ताकि वे एक अधिक व्यापक और तर्कसंगत दृष्टिकोण की ओर बढ़ सकें। प्रारम्भिक कक्षाओं के गणित के पाठ्यक्रम के दायरे में संख्याओं तथा संख्या प्रणाली को समझना और उनका इस्तेमाल करना, तुलनाओं को समझना और उन्हें मात्रात्मक ढंग से व्यक्त करना, आकारों और स्थानिक सम्बन्धों को समझना, आँकड़ों को समझकर इस्तेमाल करना आदि सब आते हैं। हमें इनके किन पहलुओं को पढ़ाने की ज़रूरत है और उन्हें हम कैसे पढ़ाएँगे, यह समझने के लिए हमें गणित के विषय क्षेत्र को अधिक व्यापक परिप्रेक्ष्य में देखना जरूरी है। हमारे मन में गणित की एक समग्र तस्वीर और उसका सम्पूर्ण विस्तार स्पष्ट होना भी जरूरी है। फिर इसे कक्षा के अनुसार सीमित करना और खास पहलुओं को चुनने की आवश्यकता होती है। इनकी समझ एकदम साफ हो

इसके लिए हमारे दिमाग में इन चुनावों के कारण का एक स्पष्ट वक्तव्य होना चाहिए।

गणितीय समस्याओं को हल करने की क्षमता को कई तरीकों से देखा जा सकता है। एक ज़ाहिर तरीका है उनके हलों की बच्चे से लगभग नकल जैसी करवा देना। यहाँ सवालों को हल करने के लिए दिए गए उदाहरणों का अनुकरण करने को कहा जाता है। किसी भी दूसरे प्रकार के प्रश्न दिए ही नहीं जाते, तो उनके समाधानों के तरीके खोजना तो दूर की बात है। इस तरीके में एक ही जैसे सवालों को एक से ही ढंग से हल करने की क्षमता विकसित होने की उम्मीद की जाती है। यहाँ वह गणितीय क्रियाकलापों में दक्षता हासिल करने की व्यवस्था के बजाय सवालों को हल करने की विधियाँ गढ़ना और समझना अधिक प्रतीत होती है। जबकि किसी अच्छे सवाल को हल करने के लिए, सवाल के भीतर ही उपयुक्त सुरागों को ढूँढ़ कर, उसे हल करने की विधि तलाश करना और फिर चरणबद्ध ढंग से आगे बढ़ना पड़ता है।

यहाँ तार्किक दृष्टि से अगला प्रश्न उठता है, ''हम गणित क्यों पढ़ाते हैं?'' यदि बच्चे अमूर्तीकरण करना नहीं सीख पाते और न ही तर्कसरणी का सिलसिला समझ पाते हैं तो क्या हमें गणित के इन पहलुओं को उन्हें पढ़ाने की सचमुच में कोई ज़रूरत है? क्या गणित में कोई सांस्कृतिक पक्षपात होता है? या कोई आनुवांशिक पक्षपात भी हो सकता है जिसके फलस्वरूप सिर्फ कुछ बच्चे ही इसे सीख सकते हैं? क्या गणित, विज्ञान, दर्शनशास्त्र तथा इतिहास और संगीत सहित अन्य विषयों में किया जाने वाला अमूर्तीकरण सर्वसुलभ क्षमता नहीं है? या कि गणित में होने वाला अमूर्तीकरण कुछ अलग प्रकार का है? हम सभी किसी ताल की लय का आनन्द ले सकते हैं लेकिन जिसे शास्त्रीय संगीत या शास्त्रीय नृत्य कहते हैं उसे सराहने के लिए ऐसे अनुभव या परिस्थितियाँ आवश्यक होती हैं जो सर्वत्र सुलभ नहीं होतीं। क्या संख्याओं और आकाशीय स्वरूपों का व्यापकीकरण करने और उनसे खेलने की क्षमता भी कुछ ऐसी ही बात है?

ऐसी स्थिति में, सार्वभौमिक प्राथमिक तथा माध्यमिक स्कूल के पाठ्यक्रम में क्या होना चाहिए? हम बच्चों से ऐसा क्या सीखने की चाहत रख सकते हैं, और उम्मीद कर सकते हैं जिससे कि वे न तो दूसरों द्वारा अक्षम बताए जाएँ, ना ही वे खुद को ऐसा समझें? ऐसा प्रश्न भी उठाया जा सकता है कि क्या उनके लिए गिनने की संख्याएँ और उनके साथ की जाने वाली क्रियाएँ जानना तथा थोड़ा–सा दशमलव अंशों और आमतौर पर उपयोग की जाने वाली भिन्नों को जानना पर्याप्त नहीं है? क्या गणित को अमूर्त और देखने में इतना जटिल बनाना ज़रूरी है कि अनेक लोग उसे समझ ही न सकें? क्या यह तथ्य, कि एक खास तरह का गणित बच्चों को समझ में नहीं आता और वे उससे आतंकित रहते हैं, उसे पढ़ाए जाने के तरीके का परिणाम है, या कि यह पढ़ाई जाने वाली विषयवस्तु के कारण है? अंततः यहाँ हमें इन प्रश्नों के बीच जटिल सम्बन्ध दिखाई देता है– गणित क्या है? तथा प्राथमिक कक्षाओं के लिए गणित का कौन–सा ऐसा जरूरी क्षेत्र है जिसे पढ़ाया जा सकता है? हमें इस पर भी विचार करना होगा कि सार्वभौमिक रूप से उस स्तर पर उसे पूरा का पूरा सीखे जाने की जरूरत है या नहीं। हमें यह साफ करना होगा कि (अ) उस आयुवर्ग, उस पृष्ठभूमि और उस ऐतिहासिक सन्दर्भ में बच्चों के लिए वह क्यों जरूरी है? (ब) क्या स्कूलों तथा शिक्षकों की उपलब्ध परिस्थितियों में उस पृष्ठभूमि के विद्यार्थियों द्वारा उसे सीखा जा सकता है?

हम जो भी फैसले करेंगे उन्हें प्रश्नों के इन छन्नों से गुजरने में सक्षम होना जरूरी है। जाहिर है कि न तो इन प्रश्न छन्नों का परिपूर्ण जानकारी और तर्कों सहित समाधान करना आसान है, और न ही वर्तमान सामाजिक और आर्थिक स्तरों की पहुँच के बीच की खाई को देखते हुए उन समाधानों को लागू करने पर किसी सहमति का बन पाना ही आसान है।

जैसा कि उपरोक्त चर्चा से स्पष्ट है, ''अध्यापन–कला क्या है?'', इस प्रश्न का अपने आप में उत्तर देना कठिन है। इसके दायरे और लक्ष्यों को सटीक ढंग से व्यक्त नहीं किया जाता, और इसे कैसे परिभाषित किया जा सकता है, इस पर पर्याप्त सहमति नहीं है। परन्तु जिस तरह यह शब्द आमतौर पर इस्तेमाल किया जाता है उसे दर्शाने वाली सामान्य समझ जरूर मौजूद है।

अध्यापन–कला क्या है?

मोटे तौर पर अध्यापन–कला से तात्पर्य होता है किसी विषय को पढ़ाने का तरीका। इस दृष्टि से देखने पर इस शब्द में कई चीजें समायी हुई दिखती हैं। इसमें कक्षा में होने वाला शैक्षणिक आदान–प्रदान और सीखने–सिखाने की प्रक्रियाएँ, सीखने–सिखाने की सामग्री का प्रकार और उसकी प्रकृति, मूल्यांकन पद्धति, अध्यापक तथा विद्यार्थियों का सम्बन्ध, विद्यार्थियों की सहभागिता की सहमति, कक्षा की भौतिक व्यवस्थाएँ आदि सभी कुछ आ जाता है। पढ़ाई के लिए चुनी गई विषयवस्तु, जानकारी, सिखाए और सीखे जाने वाले कौशल और अवधारणाएँ भी निश्चित रूप से अध्यापन–कला को प्रभावित करते हैं (और कुछ लोगों के अनुसार तो वे उसमें शामिल ही रहते हैं)। इसका मतलब यह हुआ कि यहाँ विविधता के प्रति एक सम्वेदना और समझ होने की तथा पाठ्यक्रम के तौर पर सामग्री और प्रसंगों के चुनाव में सावधानी बरतने की जरूरत होती है। यदि आप कक्षाओं में दिखाई देने वाले अध्यापन–कला के स्वरूपों पर ध्यानपूर्वक विचार करें तो पाएँगे कि इसका सम्बन्ध इन बातों

से भी है कि शिक्षकों को कैसे तैयार किया जाता है; प्रशासनिक तौर पर उनके साथ कैसा बर्ताव किया जाता है; शाला का भवन और कक्षा कैसी है; तथा कक्षा के भीतर तथा अध्यापकों में पाई जाने वाली विविधता के कारण कैसी सामाजिक, आर्थिक और राजनैतिक अन्तर्धाराएँ बह रही हैं। इनके अलावा ऐसे अन्य व्यवस्थात्मक और परिस्थितिजन्य कारक भी हो सकते हैं जो सीखने–सिखाने के तरीके को प्रभावित कर सकते हैं। इस तरह यह वाकई काफी विस्तृत परिदृश्य हो जाता है।

हम यहाँ अपने को कुछ पहलुओं तक ही सीमित रखेंगे। ऊपर बताए गए पहलुओं में से कुछ यहाँ फिर ऐसे मुद्दों की तरह दोहराए जाएँगे जिनका अध्यापन–कला पर महत्वपूर्ण प्रभाव पड़ता है। ये हैं:

(अ) गणित पढ़ाने के लक्ष्य

(ब) गणित की प्रकृति और उसके प्रमुख सिद्धान्त

(स) अध्यापक और उसका दृष्टिकोण

(द) बच्चे गणित कैसे सीखते हैं

(क) इस विषय के प्रति समाज का रवैया

इनसे हमें यह अलग–अलग कक्षाओं और आयुवर्गों के विद्यार्थियों से सीखने की विशेष अपेक्षाओं और उनके उद्देश्यों को तय करने में मदद मिलेगी। पहले दो मुद्दों का विस्तृत निर्धारण इन कारकों पर निर्भर करेगाः तथाकथित विषय, उसकी प्रकृति, मानव समाज तथा उन विद्यार्थियों के लिए उसका प्रयोजन जिनके लिए अध्यापन कार्यक्रम विकसित किया जा रहा है। हमें उस व्यक्ति को भी ध्यान में रखना होगा जो अध्यापक के रूप में सिखाने का काम करने वाला है। ताकि यह समझा जा सके कि निर्धारित लक्ष्यों, उम्मीदों और विद्यार्थियों की पृष्ठभूमियों को देखते हुए उससे क्या अपेक्षाएँ हैं। तीसरा मुद्दा है कि यह विषय जिस प्रकार सीखा जाता है उस प्रक्रिया के बारे में क्या हमें किसी विशेष समझ की जरूरत है? इससे हमें ऐसी कक्षाएँ निर्मित करने में मदद मिलेगी जो सीखने में सहायक होती हैं। चौथा मुद्दा है गणित के बारे में समाज में व्याप्त दृष्टिकोण चाहे वह शिक्षकों का हो, या विद्यार्थियों का या उनके माता–पिता का। ये सभी मुद्दे इस विषय की अध्यापन–कला में महत्वपूर्ण योगदान देते हैं।

गणित पढ़ानाः कुछ तरीकों पर चर्चा

किसी भी विषय के सीखने–सिखाने पर चर्चा करने के लिए इसकी बुनियादी समझ आवश्यक है कि बच्चे कैसे सीखते हैं। हमारा अध्यापन कार्यक्रम उसी समझ पर आधारित होना चाहिए। विशेषकर जब विषय के प्रत्येक अलग अंश की अपनी अलग प्रकृति हो जो उसके सीखने को एक विशेष रंग देती हो। किसी खास विद्यार्थी के लिए इन अंशों का अनुभव और उससे की जाने वाली अपेक्षाओं की प्रति अन्य विद्यार्थियों की तुलना में बहुत भिन्न हो सकती है। बहुत वर्षों तक, अन्य सभी कुछ सीखने के समान ही गणित का सीखना भी रैखिक और निरन्तर अभ्यास के द्वारा ही होने वाला माना जाता था। जो कुछ सीखा जाना होता था उसे छोटे–छोटे टुकड़ों में बाँटकर बच्चों को अभ्यास करने के लिए दिया जाता था। इस पद्धति का प्रमुख उदाहरण था सीखने का न्यूनतम स्तर (मिनिमम लर्निंग लेवेल एमएलएल)। इसका दावा था कि अध्यापन–कला योग्यता के अनुसार निर्धारित होती है।

पाठ्यपुस्तक तथा दूसरी शिक्षण सामग्री में हर उस छोटे अंश के लिए जिसे 'योग्यता' का सूचक माना जाता है, एक पूरा पेज या खण्ड दिया गया होता था। ऐसी आशा की जाती थी कि एक बार जब बच्चे इसे कर लेंगे तो वे अपने आप योग्यता का वह अंश भी निश्चित ही विकसित कर लेंगे और फिर आगे बढ़ेंगे। पर एमएलएल दस्तावेज खुद ही 'योग्यता' शब्द को कई अलग–अलग तरीकों से इस्तेमाल करता है। ढीले–ढाले ढंग से इसका उपयोग जानकारी को स्मरण कर सकना, विधि का अनुसरण करना, फार्मूलों का इस्तेमाल करना, और कुछ मामलों में, अवधारणाओं को जानना तथा सवालों को हल कर पाना, इन सबके लिए किया जाता था। इसके फलस्वरूप यह स्पष्ट नहीं है कि एमएलएल दस्तावेज में 'योग्यता' शब्द का क्या अर्थ निकाला जाना चाहिए। जमीनी स्तर पर भी योग्यता का विमर्श आगे नहीं बढ़ा है। इस मामले में, ऐसा लगता है कि गणित की तथाकथित सीढ़ी जैसी प्रकृति का विश्लेषण अभी भी उसी ढाँचे में किया जाता है, और इसकी अवधारणा भी टुकड़ों–टुकड़ों में बाँटकर, विधियों के अभ्यास और तथ्यों को याद रखने के रूप में की जाती है।

एक अन्य तत्व जिस पर अध्यापन–कला अत्यधिक निर्भर करती है वह है सीखने–सिखाने की सामग्री (कार्यपुस्तिका और पाठ्यपुस्तक) का प्रस्तुतिकरण। वह बच्चों से क्या करने की अपेक्षा रखती है और वह कक्षा की पढ़ाई की और मूल्यांकन की कैसी व्यवस्था सुझाती है। सामग्री के निर्माण में यह स्पष्ट होना चाहिए कि वह किसके लिए है और इसलिए उसमें क्या–क्या शामिल होना चाहिए। यदि सामग्री बच्चों के लिए है तो उसमें खाली जगह के द्वारा उचित खुलापन, उपयुक्त फांट आकार, बच्चों के अनुकूल बनाए गए चित्र तथा उपयुक्त भाषा होना चाहिए।

गणित की पाठ्यपुस्तकें और कक्षाएँ, एमएलएल के आगमन के पहले और उसके बाद, लगभग एक–सी ही रही हैं क्योंकि विद्यार्थियों से अभी भी सवाल हल करने की विधियों का अभ्यास करने के लिए और प्रश्नों को जल्दी से अंकों और मात्राओं में बदलने के लिए कहा जाता है। बच्चे की अभिव्यक्ति और उसकी भाषा को शामिल करने, स्वयं खोजने और गणितीय स्थितियों से

निपटने के नए तरीके गढ़ने की आजादी दिए जाने को शिक्षण सामग्री में न तो स्वीकार किया जाता है और न इस सबकी अपेक्षा है। वे गणित सीखने के लिए 'दिए गए और हल किए गए उदाहरण को समझने और उसी तरह के और सवाल करने' की पद्धति का ही अनुसरण करते हैं। यहाँ इस बात पर भी गौर किया जाना चाहिए कि जब कोई विशिष्ट योग्यता हासिल करने की बात कही जाती है तो उसका मतलब है कि पहले दी जाने वाली मिली–जुली प्रश्नावलियाँ, जो कम से कम बच्चे से दिमागी श्रम करवाती थीं, अब केवल एक ही विकल्प का अभ्यास करने तक सीमित हो गई हैं। हाँ, इसी समय पुस्तक की डिज़ाइन का महत्व तथा उसमें चित्रों और रंगों की ज़रूरत को अवश्य महसूस किया जाने लगा, अतः किताबें कम से कम भिन्न दिखने लगीं। तथापि चित्रों, डिज़ाइन और अन्य पहलुओं के आधार–सिद्धान्तों में बच्चे को सक्रिय रूप से अपना दिमाग लगाने के अवसर दिए जाने की जरूरत को शामिल नहीं किया गया।

स्पष्ट अभिव्यक्ति के अभाव में 'योग्यता' शब्द का जोर व्याख्याओं, तथ्यों और सवाल हल करने के छोटे रास्तों को सिखाने पर ही था। गणित के सन्दर्भ में 'करके सीखना' और 'योग्यता' जैसे महत्वपूर्ण सिद्धान्तों की न तो पर्याप्त जाँच–पड़ताल की गई और न ही उन पर ध्यान दिया गया। जैसे कि जोड़ सिर्फ एक गणितीय प्रक्रिया थी जिसमें पहले एक–एक अंकों को जोड़ना रहता है, फिर दो या उससे अधिक अंकों वाली ऐसी संख्याओं को जोड़ना जिनमें 'हासिल' की जरूरत नहीं होती और फिर संख्याओं के स्तम्भों को हासिल का उपयोग करके जोड़ना पड़ता है। गणित को 'किया जाने वाला' विषय बनाने की कोशिश करने में योग्यता–आधारित भिन्न संख्याएँ केवल परिभाषाएँ और गणितीय क्रियाएँ बनकर रह गईं। गणितीय अवधारणाओं की ऐसी अंशों में बँटी दृष्टि के कारण बच्चों के अपने स्वयं के विचारों और तर्क को निर्मित करने और व्यक्त करने के अवसर सिकुड़ते गए।

चूँकि इस पद्धति में 'करने' का आशय सिकुड़कर ज्यादातर यांत्रिक दोहराव भर रह जाता है, इसलिए इसमें उस 'करने' के दर्शन नहीं होते जो खोजने से, तर्कों को गढ़ने से, अभिव्यक्ति और ऐसी परिभाषाएँ विकसित करने से उपजता है जिन पर दूसरों से प्रतिक्रियाएँ मिलती हैं। इसका यह मतलब नहीं है कि बच्चों को मनुष्य जाति के समूचे ज्ञान को फिर से खोजकर निकालना है, या अपने आप सभी बातों का पता लगाना है। मानव समाज ने अपनी कालयात्रा में जो ज्ञान बटोरा है वह सबके साथ बाँटा जाना है, पर यह ऐसे तरीके से होना चाहिए कि बच्चे अपनी वैचारिक ताजगी, जिज्ञासा और सीखने की उत्कंठा को बनाए रख सकें। इसका अभिप्राय उपलब्ध ज्ञान का वर्चस्व बनाये रखना कतई नहीं हो सकता।

गणित कैसे पढ़ाएँ? : दो दृष्टिकोण

गणित कैसे पढ़ाया जाता है, इसका विश्लेषण करने में दो भिन्न दृष्टिकोण दिखाई देते हैं जिनके अन्तर्गत शिक्षण कार्यक्रमों का वर्गीकरण किया जा सकता है। हम पाते हैं कि इन दोनों को किसी अनुपात में मिलाकर कक्षाओं को बनाया जाता है। एक सोच यह है कि यदि आप विद्यार्थियों से विधियों और छोटे उपायों का इस्तेमाल करते हुए ढेर सारे सवालों को हल करने का अभ्यास करवाएँ, तो वे अंततः यह समझना शुरू कर देंगे कि कोई विधि कैसे काम करती है। शायद उन्हें थोड़ा यह भी समझ आ जाए कि वह क्यों काम करती है। जो भी हो वे विधि के क्रमिक चरणों को ठीक से सीख लेते हैं और उसे किसी भी प्रसंग में इस्तेमाल करने में सक्षम हो जाते हैं। हालाँकि सवालों की प्रकृति में बदलाव होंगे।

दूसरी सोच यह है कि गणित सीखना वास्तव में इस बात की समझ विकसित करना है कि यह विषय किस प्रकार निर्मित हुआ है, इसके बुनियादी तत्व क्या हैं, और उन तार्किक चरणों को खोजना है जिनसे कुछ मामलों में विधियाँ और छोटे मार्ग निकलते हैं। इसमें बच्चे से सवालों को हल करने के लिए कई तरीके विकसित करने, और यदि उपयुक्त लगे तो विधियों का इस्तेमाल करने के काबिल बनने की उम्मीद की जाती है। यहाँ तर्क यह नहीं होगा कि यही सबसे अच्छी विधि है और इसे सबको सीखना जरूरी है, बल्कि जोर उपयुक्त लगने पर उचित विधि के इस्तेमाल करने पर है। विद्यार्थी यदि चाहें तो छोटे उपायों को भी जान सकते हैं, उन्हें खोज सकते हैं, उन पर बहस कर सकते हैं और उन्हें इस्तेमाल कर सकते हैं।

बच्चों को विधियों के अलावा भी बहुत कुछ सीखना जरूरी है, इसके पक्ष में अनेक उदाहरण दिए जाते हैं। इनमें सबसे सीधा उदाहरण है दो अंकों की संख्याओं को जोड़ना। उपलब्ध साक्ष्यों से पता चलता है कि विधियों से बच्चों का परिचय यांत्रिक ढंग से कराया जाता है जिसके फलस्वरूप वे ऐसे जोड़ को दो अलग–अलग एक अंक की संख्याओं को जोड़ने की तरह देखते हैं। इस तथ्य पर भी गौर नहीं किया जाता कि जब हम किसी संख्या को दो या तीन अंकों की किसी अन्य संख्या से गुणा कराते हैं तो दहाई के अंक से मिलने वाले गुणनफल को इकाई से अंक से प्राप्त गुणनफल के एकदम सीधे नीचे नहीं लिखा करते जाता। उसे इकाई के स्थान पर काटने का चिन्ह बनाकर बाईं ओर खिसका दिया जाता है। उदाहरण के लिए:

```
   17
 X 23
 ----
   51
  34X
 ----
```

पर हमसे हमेशा इस खिसकाने का कारण खोजने के लिए नहीं कहा जाता। इसी प्रकार के उदाहरण भाग की क्रिया में भी होते हैं।

कुछ लोग तर्क देते हैं कि हासिल लगाने, या उधार लेने की अवधारणाओं के लिए स्थानीय मान की समझ जरूरी है, इसलिए जब तक हम बच्चों में स्थानीय मानों को पहचानने की सामान्य क्षमता विकसित नहीं करवा पाते, तब तक वे ऐसे जोड़ या घटाने वाले सवाल नहीं कर पाएँगे जिनमें हासिल लगाने या उधार लेने की जरूरत पड़ती है। यहाँ मूल बात यह है कि जोर विषय का ढाँचा और अवधारणाएँ सीखने पर है। एक बारगी जब उन्हें सीख लिया जाता है तब उनके उपयोग विद्यार्थी धीरे–धीरे सीख ही जाएँगे। इसलिए इन बातों में दोनों दृष्टिकोणों में स्पष्ट अन्तर दिखता है, यद्यपि अन्तिम लक्ष्यों पर उनमें सहमति हो सकती है।

मूर्त से अमूर्त की ओर, इसका क्या अर्थ है?

अध्यापन–कला के एक और पहलू का सम्बन्ध कक्षा में प्रयोग की जाने वाली सामग्री की प्रकृति और उसकी भूमिका से है। आमतौर पर हम यह मानते हैं कि अमूर्त अवधारणाएँ, स्थूल परिस्थितियों को निर्मित करने, अनुभव करने और उनका विश्लेषण करने की प्रक्रिया द्वारा हासिल की जाती हैं। कक्षा में सहायक सामग्री की तरह ज्यादा से ज्यादा चीजें रखने पर क्रमशः अधिक जोर दिया जाता रहा है। तथाकथित गणित की प्रयोगशाला (मैथलैब) के विचार का व्यापक रूप से समर्थन और वकालत की गई है। लोगों को ऐसा लगता है कि बच्चे गणित की प्रयोगशाला में होने वाले अनुभवों से अवधारणाएँ सीखते हैं। इस पर सावधानी से विचार किए जाने की जरूरत है।

इसमें कोई शक नहीं कि बच्चों की मदद करने के लिए स्थूल चीजों और स्थितियों को इस्तेमाल करने का विचार महत्वपूर्ण है। ये अमूर्त अवधारणाओं को निरूपित करने के लिए अस्थाई प्रतिरूपों का काम करते हैं। उदाहरण के लिए, पाँच पत्थर या पाँच कुर्सियाँ संख्या 5 के लिए स्थूल प्रतिरूप हैं। गत्ते में से काटा गया त्रिभुजाकार टुकड़ा त्रिभुज का प्रतिरूप है क्योंकि यह त्रिभुज के कुछ प्रमुख गुणों को दर्शा सकता है। पर यह स्वीकार किया जाना चाहिए कि ये चीजें पूरी तरह पाँच या त्रिभुज को निरूपित नहीं करतीं। वे केवल प्रारम्भिक स्तरों पर इन अवधारणाओं का सम्प्रेषण करने के लिए हमारे ढाँचे हैं। विद्यार्थियों को धीरे–धीरे इन स्थूल ढाँचों से आगे बढ़कर इन गणितीय तत्वों को ऐसे अमूर्त विचारों की तरह देख सकना चाहिए जिनका वास्तव में स्थूल निरूपण नहीं किया जा सकता।

चतुर्भुज चार सरल रेखाओं से घिरी एक बन्द आकृति होती है। सरल रेखा अनन्त तक फैली हुई एक ऐसी डोरी होती है जिसकी कोई मोटाई नहीं होती। इसलिए सार की बात यह है कि वास्तविक रेखा, और इस कारण वास्तविक चतुर्भुज का स्थूल निरूपण तो दूर की बात है, ब्लैकबोर्ड पर भी उसका निरूपण नहीं किया जा सकता। अतः जहाँ एक ओर स्थूल अनुभवों से प्रारम्भ करना महत्वपूर्ण है वहीं बच्चे के लिए धीरे–धीरे अपनी खुद की भाषा का प्रयोग करते हुए उन्हें व्यक्त करना और अमूर्त की ओर आगे बढ़ना बेहद जरूरी है। गणित में चित्रों और गिनने की लकीरों (टैलीमार्क्स) वाली अवस्था से गुजरकर संकेत चिन्हों पर पहुँचना पड़ता है। यह गणित करना सीखने की अनिवार्य शर्त है। गणित सीखने की परिणति, किन्हीं मूर्त ढाँचों का सहारा लिए बगैर अपने आप में गणित की धारणाओं के साथ काम कर सकने की क्षमता में होना चाहिए। इसलिए जब हम बड़ी स्कूली कक्षाओं में गणित की प्रयोगशाला की वकालत करते हैं तो अध्यापन तथा बोध दोनों दृष्टियों से प्रश्न उठता है कि क्या यह आगे बढ़ने की सही दिशा है?

गणित की प्रयोगशाला के पीछे विचार यह है कि बच्चे कुछ क्रियाकलापों की खोजबीन करें। वे इससे सम्बन्धित प्रेक्षण करते हैं और फिर इन प्रेक्षणों से कार्यकारण सम्बन्धों का निष्कर्ष निकालते हैं। ऐसे कई प्रयोगों से, और पहले के प्रयोगों से एकत्रित किए गए आँकड़ों के आधार पर विद्यार्थी व्यापकीकरण करने का और परिकल्पनाएँ गढ़ने का प्रयास कर सकते हैं, जिन्हें फिर और प्रयोग करके जाँचा जा सकता है। प्रायोगिक प्रेक्षणों और परिकल्पनाओं की पुष्टि को विज्ञान की धारणाओं की ज्ञानशास्त्रीय कसौटी माना जा सकता है। दुर्भाग्य से गणित के लिए यह सच नहीं है, इसलिए गणित की प्रयोगशाला का इस्तेमाल करके बच्चों से मापों या प्रतिरूपों के द्वारा गणितीय वक्तव्यों तक पहुँचना या उन्हें सिद्ध करना ज्ञान तथा अध्यापन, दोनों दृष्टियों से गलत होगा। इस स्तर पर कोशिश बच्चे को अमूर्त धारणाओं से निपटने में सक्षम बनाने की होना चाहिए।

भाषा के जैसे समृद्ध अनुभवों को लेकर बच्चा स्कूल आता है, उसके विपरीत गणित की धारणाओं का आधार ऐसे समृद्ध अनुभव नहीं होते। सभी बच्चे दैनिक जीवन के लिए आवश्यक संख्याओं और अंकगणित से निपटने के लिए सक्षम होते हैं। वे आवश्यकतानुसार अपने आसपास के स्थान–विस्तार को व्यवस्थित करने और आकारों में रूपान्तर करने में भी समर्थ होते हैं। यह ज्ञान गूढ़ और जटिल होता है। इससे ऐसी धारणाओं को हासिल करने की बच्चों की नैसर्गिक क्षमता का पता चलता है। किसी भी समाज में सभी बच्चे इन धारणाओं के साथ काम करने में समर्थ होते हैं। समस्या तब आती है जब हम गणित पढ़ाने की कोशिश करते हैं और चाहते हैं कि वे संख्याओं, आकृतियों और उनके रूपान्तरों, गणितीय प्रक्रियाओं को मूर्त प्रसंगों से अलग कर उनका अमूर्तीकरण करें, तथा यह समझें कि क्यों ये सब काम

करते हैं। गणित के विषय का मतलब ही अमूर्त धारणाओं के बारे में बात कर सकना, और यह बता सकना होता है कि अमूर्त राशियों के बीच सम्बन्धों को कैसे समझा और विकसित किया जा सकता है। प्राथमिक कक्षाओं में सामाजिक विज्ञान और विज्ञान भी ज्यादातर अनुभव–आधारित होते हैं और यह माना जाता है कि इस स्तर पर अमूर्त धारणाएँ नहीं लादी जाना चाहिए। बड़ी प्राथमिक कक्षाओं में भी यह सम्भव है कि विज्ञान को मूर्त अनुभवों से भर दिया जाए, और बच्चों को पहले से उपलब्ध अनुभवों तथा कक्षा में होने वाले अनुभवों का उपयोग करते हुए अवधारणाओं का ढाँचा निर्मित करने में उनकी मदद की जाए। पर गणित ऐसा करने की इजाजत नहीं देती।

गणित की अध्यापन–कला बहुत कुछ इस पर निर्भर करती है कि अध्यापक बच्चों के साथ कैसे काम करते हैं। कक्षा का वातावरण ऐसा होना चाहिए कि बच्चे उसमें सहभागी हों, अपने विचार व्यक्त कर सकें, गलतियाँ कर सकें और उनके बारे में निडर होकर बात कर सकें। ऐसे वातावरण में ही बच्चों के गणित के साथ स्वस्थ रिश्ते कायम हो सकेंगे। ऐसी कोई एक विधि या तकनीक नहीं जिसका अनुसरण करने की हम अध्यापकों से अनुशंसा करें। अध्यापक को कक्षा के साथ बहना होता है और बच्चों की सहभागिता में सहायक होने की प्रक्रियाएँ रचनी पड़ती हैं, तथा ऐसा संवाद बनाए रखना पड़ता है जो धीरे–धीरे आगे बढ़े, और जो जरूरत पड़ने पर किसी पूर्व बिन्दु पर वापस लौट सके, तथा किसी अलग तरीके से विकसित किया जा सके। गणित की कक्षा के प्रमुख पक्ष की तरह इस बात को गहराई से स्वीकारना जरूरी है कि बच्चे गणित की धारणाओं तथा अवधारणाओं को अपनी पूर्वधारणाओं और अनुभवों के साथ समाहित करके और सक्रिय भागीदारी की प्रक्रिया में उन्हें संशोधित करके विकसित करते हैं। हममें से प्रत्येक सवालों को हल करने के अपने तरीके विकसित करता है। इसके लिए बच्चों को सवाल हल करने की बहुत–सी तरकीबों और विधियों से परिचित होना जरूरी हो सकता है, पर साथ ही उनका दिमाग और नए रास्तों को तलाशने और आजमाने के लिए खुला रहना चाहिए। उन्हें उपलब्ध होने वाले विचारों को आत्मसात करके अपनी अवधारणाओं के ढाँचे में ठीक से बिठा सकना चाहिए। हममें से कोई भी जो प्रतिरूप इस्तेमाल करते हैं, और जो चीजें कोई बच्चा बनाता है, वे उसे किसी सवाल को समझने में और उसे हल करने की रणनीति विकसित करने में मदद कर सकते हैं। पर वे सभी की मदद नहीं करेंगे। वे हममें से प्रत्येक के लिए अलग होंगे।

आप किसी व्यक्ति को छोटी तरकीबें बताकर या सवालों को हल करने के अपने तरीकों को उसपर लादकर गणित सीखने में उसकी मदद नहीं कर सकते। हो सकता है कि आपका तरीका आपको बहुत सरल, साफ–सुथरा और सुरुचिपूर्ण लगता हो, पर वह उसके लिए ऐसा न हो। हम विचारों को अपने–अपने ढंग से वर्गीकृत करते हैं और वे कदम उठाते हैं जो हम सोच सकते हैं। विद्यार्थी के लिए सवाल को समझना, और फिर आपने उसका हल निकालने की जो विधि इस्तेमाल की है उसके पीछे के तर्क को खोजना, इस तरह काम की कठिनाई दोहरी हो जाती है।

गणित तब सीखा जाएगा जब विद्यार्थी अपनी रणनीति विकसित करेंगे और अवधारणाओं तथा विधियों को अपने मनचाहे तरीके से उपयोग करेंगे। जाहिर है कि इसके लिए बच्चों को ढेर सारे सवालों को कई अलग–अलग तरीकों से हल करने का अवसर मिलना जरूरी है। हमें सीखने वालों का परिचय इन तमाम विविधताओं से करवाना चाहिए ताकि वे न केवल अपने स्वयं के उत्तर निर्मित करने की सामर्थ्य विकसित करें, बल्कि किसी दूसरे व्यक्ति के उत्तर को देखकर उसका विश्लेषण करने और समझने का प्रयास भी कर सकें। उनका गलतियाँ करने के प्रति निडर होना और अपनी समझ को व्यक्त करने का आत्मविश्वास होना जरूरी है। कक्षाओं के लिए इसका निहितार्थ यह है कि बच्चे अपने आप या समूहों में काम करें, उन्होंने जो हल ढूँढे हों उन्हें प्रस्तुत करें, नए सवाल गढ़ें और साथ ही नए व्यापक सूत्र तलाश करें। कक्षा ऐसी होना चाहिए कि हर बच्चा हर क्षण उसमें मन से जुड़ा और सक्रिय हो।

रचनावाद और सीखने–सिखाने की प्रक्रियाओं पर बहुत चर्चा हुई है। तर्क दिए गए हैं कि सीखने–सिखाने की प्रक्रिया रचनावादी होना चाहिए। कभी–कभी इसका यह अर्थ निकाला जाता है कि बच्चों को उनके अपने रास्ते पर चलने की, और वे क्या करना चाहते हैं यह तय करने की छूट मिलनी चाहिए। यहाँ इस बात पर जोर देना जरूरी है कि, गणित में सामग्री के इस्तेमाल करने के मुद्दे की ही तरह, बच्चों को उनकी खुद की समझ को व्यक्त करने और उसे आगे बढ़ाने की सुविधा को उस विषय की प्रकृति और बच्चों के साथ ज्ञान को बाँटने की व्यवस्था के परिप्रेक्ष्य में ही देखा जाना चाहिए। एक बारगी जब गणित का पाठ्यक्रम तय करने के आधार पर सहमति बन जाए तब कक्षा और स्कूल को विषय के महत्वपूर्ण माने जाने वाले क्षेत्रों में बच्चों की क्षमता विकसित करने में मदद करना पड़ेगी। शिक्षक बच्चों से यह नहीं पूछ सकता कि क्या किया जाना चाहिए। ज्यादा से ज्यादा वह ऐसे विकल्प रख सकता है जो कार्यक्रम में दिए गए लक्ष्यों और उद्देश्यों के अनुरूप हों ताकि वे उनमें से चुनाव कर सकें। अपने आप में रचनावाद की धारणा का और उसके गणित से सीखने–सिखाने से सम्बन्ध का और अधिक सावधानीपूर्वक विश्लेषण किए जाने की और समझे जाने की जरूरत है।

गणित में मूल्यांकन

अध्यापन–कला के किसी भी वक्तव्य का एक महत्वपूर्ण भाग है मूल्यांकन। सामान्यतः मूल्यांकन के प्रमुख पहलू हैं: (अ) मूल्यांकन का उद्देश्य (ब) मूल्यांकन की प्रक्रिया में विद्यार्थी की सहभागिता (स) मूल्यांकन की प्रक्रिया (द) बच्चे को मूल्यांकन का परिणाम (फीडबैक) किस प्रकार बताया जाएगा।

अभी जिस ढंग से मूल्यांकन किया जाता है वह अधिकांश बच्चों में भय और निरर्थकता की भावना भर देता है। उन थोड़े से बच्चों को छोड़कर जिन्हें अच्छा करने का भरोसा होता है, अन्य बच्चे सामान्यतः उसे जल्दी से निपटाना और किसी तरह घिसटकर पास हो जाना चाहते हैं। किसी को भी परीक्षा, परीक्षा में प्रदर्शन और सीखने के बीच सम्बन्ध नहीं दिखाई देता। विशेष रूप से गणित की परीक्षाओं में किए गए कार्यों की प्रकृति और जिस तरह उनका मूल्यांकन किया जाता है उसके परिणामस्वरूप बच्चे न केवल परीक्षा से बल्कि गणित सीखने की पूरी प्रक्रिया से भयभीत रहने लगते हैं। मूल्यांकन की पूरी प्रक्रिया का उद्देश्य यह पता लगाने के बजाय कि बच्चे को क्या आता है, यह दिखाना होता है कि उसे क्या नहीं आता। विकासात्मक या योगात्मक मूल्यांकन या ऐसी अन्य अवधारणाएँ अच्छी मूल्यांकन प्रक्रिया के उद्देश्य, महत्व और निहितार्थों को एकदम स्पष्ट नहीं करतीं। हाल के वर्षों में हमने सतत और सम्पूर्ण मूल्यांकन, तथा परीक्षारहित मूल्यांकन की बात की है और इसमें जो बच्चे पिछड़ जाते हैं उन्हें अध्यापक द्वारा अतिरिक्त सहायता दिए जाने के पक्ष में तर्क हैं।

परीक्षा को समाप्त करने, कमजोर विद्यार्थियों को न रोकने की नीति और उन्हें कक्षा के बाहर अतिरिक्त सहायता देने की बात अवधारणा की तरह आकर्षक लगती है पर उसे जमीन पर व्यावहारिक रूप से लागू करना सम्भव नहीं है।

शिक्षा स्कूल, शिक्षकों और बच्चों के बीच होने वाला संवाद है। यदि इस संवाद को भरोसे के आधार पर सहज नहीं बनाया जाता और खुलेपन की छूट नहीं दी जाती तो इसके फलस्वरूप कक्षा की प्रक्रियाओं में विकृतियाँ आएँगी। खासतौर से गणित में बच्चे और अध्यापक, दोनों के लिए यह जानना महत्वपूर्ण है कि बच्चा क्या जानता है, और इसकी भी समझ होना चाहिए कि उसे किन क्षेत्रों में संघर्ष करना पड़ता है। बच्चे की पूर्वस्थिति के आधार पर ही उसकी प्रगति को आँके जाने की जरूरत है। बच्चे के प्रदर्शन का मूल्यांकन दूसरे बच्चों से उसकी तुलना करने के बजाय एक अन्तराल में स्वयं उसके काम में आए परिवर्तन के आधार पर किया जाना चाहिए। मूल्यांकन और अपेक्षा, सीखने के लिए आवश्यक प्रयास करने का महत्वपूर्ण हिस्सा हैं। परीक्षा के डर के कारण मूल्यांकन की उपयोगिता निरस्त नहीं हो जाती।

समाज गणित को विस्मय और भय से, तथा सफलता की कुँजी की तरह देखता है। यह धारणा काफी मजबूत दिखाई देती है कि जो लोग गणित सीख पाते हैं वे अधिक बुद्धिमान होते हैं और जीवन में सफल होने के लिए उनके पास अधिक क्षमता और अवसर होते हैं।

गणित को एक ऐसे छन्ने की तरह देखा जाता है जो उन लोगों को, जो उच्च बौद्धिक क्षेत्रों में जाएँगे, दूसरे लोगों से अलग करता है जो समाज में कम बौद्धिक भूमिकाएँ निभाएँगे। बौद्धिक और तकनीकी भूमिकाएँ हासिल करने की आतुरता में माता–पिता और अध्यापक विद्यार्थियों पर सीखने के लिए दबाव डालते हैं। जब कई बच्चों को सीखने में असमर्थ घोषित कर दिया जाता है और परीक्षाएँ पास करने के लिए छोटे उपायों से उनकी मदद की जाती है, तो छँटनी की अवचेतन शुरुआत हो जाती है।

मूल्यांकन के डर और इस मान्यता, कि गणित सीख लेने पर अनेक दरवाजे खुल जाते हैं, के कारण कक्षा का वातावरण तनावमय हो जाता है। समाज में आमतौर पर व्याप्त यह धारणा कि गणित कठिन होता है और उसे थोड़े से लोग ही कर सकते हैं, बच्चों के धीरे–धीरे अपनी योग्यता विकसित करने में बाधक बन जाते हैं। इस बहस में किसी निर्णय पर पहुँचना कठिन है, लेकिन गणित के अध्यापन के विभिन्न पक्षों पर विचार करने से स्पष्ट है कि हम केवल पद्धतियों, कक्षा की व्यवस्थाओं और प्रस्तुतिकरण की शैलियों की बात नहीं कर रहे हैं। हमें शिक्षा और पूरी शिक्षण प्रक्रिया पर समग्र रूप से गौर करना होगा और उसे गणित के, बच्चों, पालकों और अध्यापकों के तथा उनकी आकांक्षाओं के सन्दर्भ में देखना होगा, तभी हम अध्यापन–कला की समझ विकसित कर सकेंगे।

हृदयकांत दीवान *(हार्डी) एकलव्य के संस्थापक सदस्य हैं। वर्तमान में विद्याभवन सोसायटी, उदयपुर के संगठन सचिव एवं शैक्षणिक सलाहकार हैं। वे शिक्षा के क्षेत्र में विभिन्न पक्षों पर विभिन्न तरीकों से पिछले 35 वर्षों से कार्य कर रहे हैं। विशेष रूप से वे शैक्षणिक नवाचार तथा राज्य की शैक्षणिक व्यवस्थाओं में संशोधन के प्रयासों से जुड़े रहे हैं। उनसे vbsudr@yahoo.com पर सम्पर्क किया जा सकता है ।*

4 गणित सीखने में संस्कृति का योगदान

के. सुब्रमण्यम



हाल ही में अहमदाबाद में हुई एक कार्यशाला में हमने प्राथमिक स्कूल शिक्षकों से यह बताने को कहा कि उनके विद्यार्थी स्कूल के बाहर क्या करते हैं, और क्या उसमें किसी प्रकार का गणित भी कहीं शामिल रहता है। शिक्षकों ने बहुत सारी बातें बताईं। उनके विद्यार्थी, जो गरीब शहरी परिवारों से आते हैं, अपने माता–पिता के व्यवसाय में मदद करते हैं। वे सब्जी बेचते हैं, पतंगें, बिन्दी के पैकेट, अगरबत्तियाँ और अन्य कई चीजें भी बनाते और बेचते हैं। वे अलग–अलग इकाइयों में सब्जियों के दाम जानते हैं, और यह भी कि एक 'कोड़ी' (20 दर्शाने वाली इकाई) पतंगें बेचने पर उन्हें कितना मुनाफा होगा। पतंगें, कागज़ और डण्डियों से बनती हैं। कागज़ पैकेटों में बिकता है, और डण्डियाँ बण्डलों में उनकी दरें अलग–अलग इकाइयों में होती हैं। स्वाभाविक रूप से, ये फैसले करते समय कि कितना कच्चा माल खरीदना, कितना सामान बनाना और बेचना, इस सबमें कितना समय लगाना आदि समस्याएँ खड़ी होती हैं। इन समस्याओं से पार पाने के लिए बच्चे अपने बड़े भाई–बहनों के साथ या बड़ों के साथ अपने ही तरीके निकालते रहते हैं। और, ऐसा करने में पूरे समय वे संख्याओं और गणित का उपयोग कर रहे होते हैं।

> *शायद ही किसी स्कूल के पाठ्यक्रम में दैनिक जीवन के गणित के लिए कोई स्थान हो। बच्चों की गणित विषय में रूचि को बढ़ाने में कुछ परिपेक्ष्यों को शामिल करना बेहतर विकल्प हो सकता है ताकि बच्चों द्वारा गणित सीखने की प्रक्रिया स्कूल के अन्दर तथा बाहर निर्बाध रूप से चलती रहे।*

ये बातें हमें बच्चे नहीं बल्कि उनके शिक्षक बता रहे थे। हमने उनसे पूछा कि उन्हें यह कैसे पता चला कि बच्चे इतना सब जानते हैं। उन्होंने उत्तर दिया कि जब बच्चे स्कूल से अनुपस्थित रहते हैं तब वे इसका कारण जानने के लिए उनके घर जाते हैं। वे माता–पिता से बात करते हैं और पता चलता है कि बच्चा उनकी मदद कर रहा है – शायद फेरी लगाकर सब्जी बेचने में या जब माँ किसी काम से गई हो। हमें इस बात की खुशी थी कि बच्चों की उपस्थिति पक्की करने के लिए शिक्षक इतना कष्ट उठाते हैं। परन्तु इस जवाब को लेकर हमें थोड़ी शंका भी थी। जब हमने बच्चों के लिए तैयार की गई वर्कशीट्स (इन स्कूलों में नियमित पाठ्यपुस्तकों की बजाय अपनी खुद की वर्कशीट्स का उपयोग किया जाता है) को खोला तो उनमें, हमने बच्चों की जिन्दगी के बारे में जो कुछ सुना था, उसका कोई संकेत नहीं मिला। हम समझ गए कि शिक्षकों को बच्चों की स्कूल के बाहर की गतिविधियों का पता स्कूल के बाहर ही चला, गणित की कक्षा में नहीं।

शिक्षकों से कुछ चर्चा के बाद हमें महसूस हुआ कि 'उचित' गणित क्या है, इस बारे में उनकी काफी मजबूत धारणाएँ थीं। एक डच अध्ययन में इस्तेमाल किया गया यह प्रश्न कि 'यदि एक ध्रुवीय भालू का वजन 350 किग्रा हो तो लगभग कितने बच्चों का वजन एक ध्रुवीय भालू के बराबर होगा', उनकी दृष्टि में अच्छा प्रश्न नहीं था। क्योंकि इसमें उसके हल के लिए आवश्यक सारी जानकारी नहीं है। जो समस्याएँ बच्चे स्कूल के बाहर सुलझा रहे हैं उनमें अक्सर पूरी जानकारी नहीं होती है। उनका कोई एक सटीक उत्तर नहीं होता है और बच्चे उन्हें हल करने के लिए अनौपचारिक तरीके इस्तेमाल करते हैं। इसलिए अध्यापकों को ऐसा नहीं लगता है कि बच्चे सचमुच में गणित कर रहे हैं। आर्थिक रूप से उत्पादक गतिविधियों के सन्दर्भ में, बच्चों के सोच–विचार करने और हिसाब लगाने तथा स्कूल के गणित के बीच कोई अदृश्य दीवार जैसी प्रतीत होती है। यह कहानी कोई अनोखी नहीं है। अनेक शहरी गरीब परिवारों में बच्चे आर्थिक गतिविधियों में भाग लेते हैं। अलग–अलग सामाजिक और भौगोलिक सन्दर्भों में यदि हम ध्यान से देखें तो पाएँगे कि उनमें भी बच्चों को स्कूल के बाहर गणित का उपयोग करने के अवसर मिलते हैं। ऐसे 'रोजमर्रा' के गणित के लिए लगभग किसी भी स्कूली पाठ्यक्रम में कोई जगह नहीं होती। बहुत हुआ तो सवालों के साथ कुछ प्रसंगात्मक जानकारी जोड़ दी जाती है ताकि उनमें बच्चों की दिलचस्पी बढ़ जाए। इसलिए जो गणित बच्चे स्कूल के भीतर सीखते हैं और जो वे बाहर सीखते हैं, दोनों अलग–अलग और असम्बन्धित बने रहते हैं। निश्चित ही, यहाँ और भी बड़ा मुद्दा स्कूल के पाठ्यक्रम और स्कूल के बाहर के जीवन के बीच के सम्बन्ध का है। चूँकि गणित ज्ञान की एक अमूर्त शाखा है, इसलिए हो सकता है कि कोई सोचे कि संस्कृति और दैनिक जीवन से इसके सम्बन्ध के बारे में कहने के लिए कुछ खास नहीं

है। तथापि अनेक शोधकर्ताओं ने 'रोजमर्रा' के गणित और स्कूल के गणित के सम्बन्ध का अध्ययन किया है और परिणामस्वरूप महत्वपूर्ण अन्तर्दृष्टियाँ उपलब्ध हुई हैं।

पियाज़े का अनुसरण करते हुए रचनावाद के समर्थक इस तथ्य पर ज़ोर देते हैं कि बच्चे स्कूलों में ऐसे खाली दिमाग लेकर प्रवेश नहीं करते जिनको भरा जाना है – वे कई ऐसे क्षेत्रों में, जो स्कूल के गणित और विज्ञान के अन्तर्गत भी आते हैं, पहले ही काफी जटिल ज्ञान हासिल कर चुके होते हैं। संज्ञानात्मक विकास का अध्ययन करने वाले मनोवैज्ञानिकों ने बच्चों द्वारा हासिल की जाने वाली स्वस्फूर्त अवधारणाओं की एक विस्तृत तस्वीर निर्मित की है। परन्तु सीखने की व्यक्तिगत प्रक्रिया पर ही ध्यान केन्द्रित रखने के लिए रचनावाद की प्रथम लहर की काफी आलोचना की गई। इस आलोचना का स्रोत कई ऐसे दृष्टिकोण थे जो संस्कृति और समाज के प्रभाव के प्रति ज्यादा संवेदनशील थे। गणित शिक्षण से जुड़े समुदाय में कई विचारक और शोधकर्ता अभी भी इन आलोचनाओं के निहितार्थों पर काम कर रहे हैं। यहाँ हम इस बहस से निकलने वाले कुछ विचारों और सम्भावनाओं पर विचार करेंगे।

तेरेज़िन्हा नूनेस और उनके सहयोगियों द्वारा सड़क के लोक गणित के शुरुआती अध्ययनों, जैफ्रे साक्स द्वारा पापुआ न्यू गिनी समुदायों के गणित के मानवविज्ञानी अध्ययनों, भारतीय पृष्ठभूमि में फरीदा खान के अध्ययनों तथा कई और अध्ययनों से प्रकट होता है कि रोजमर्रा की गतिविधियों के सन्दर्भ में गणित कैसे स्वस्फूर्त ढंग से अनायास सामने आ जाता है। इन अध्ययनों ने यह भी दर्शाया कि रोजमर्रा का लोकगणित कैसे स्कूल के गणित से भिन्न होता है। दैनिक जीवन के प्रसंगों में, गणना 'मौखिक' ढंग से की जाती है, और टुकड़ों में किए गए आँशिक हलों को जोड़ने की तरकीबों का इस्तेमाल करती है। बिहार में मुसहरी जनजाति के एक वयस्क व्यक्ति से पूछा गया कि यदि हर तरबूज 35 रुपये का हो तो दस तरबूजों का दाम कितना होगा। तो वह 'दायीं तरफ एक शून्य जोड़कर' सीधे 350 रुपये पर नहीं पहुँच गया। इसके बजाय उसने पहले तीन तरबूजों के दाम की गणना की जो 105 रु. हुई। नौ तरबूज 315 रुपये के हुए और 10 तरबूज 350 रुपये के हुए। नूनेस के अध्ययन में ठीक इसी सवाल को हल करने के लिए ठीक यही विधि ब्राजील में फेरी लगाकर सामान बेचने वाले बच्चे द्वारा भी इस्तेमाल की गई। 'दायीं तरफ शून्य जोड़ने' की तरकीब 'लिखित' गणित का हिस्सा है, और यह रोजमर्रा के गणित में आम चलन में नहीं दिखाई देती। अनुपात की समस्याओं को हल करने के लिए भी रोजमर्रा के गणित में टुकड़ों में किए गए हलों को जोड़ने की नीति अपनाई जाती है, बजाय 'इकाई की गणना विधि' या 'तीन का नियम' इस्तेमाल करने के, जैसा कि स्कूल में सिखाया जाता है। उदाहरण के लिए, इस सवाल को लें, कि 'यदि 18 किलो पकड़ी गई श्रिंप में से खोल उतारने के बाद तीन किलो खालिस श्रिंप मछली मिलती है, तो दो किलो खालिस श्रिंप के लिए कितनी ऐसी मछली पकड़ना होगी? 'नूनेस के अध्ययन में एक मछुआरे ने इस तरह इसका हिसाब लगायाः हमें 9 किलो पकड़ी मछली से $1^1/_2$ किलो श्रिंप मछली मिलती है इसलिए $^1/_2$ श्रिंप 3 किलो पकड़ी मछली से मिलती है। अब 9 और 3, 12 होते हैं इसलिए 12 किलो पकड़ी मछली से 2 किलो खालिस श्रिंप मिलेगी।

चूँकि ये विधियाँ मौखिक थीं, अतः उत्तर देने वाले कभी–कभी गणना का कोई चरण पूरा करना भूल भी जाते थे, परन्तु इससे होने वाली त्रुटियाँ आमतौर पर छोटी होती थीं और उत्तर मोटे तौर पर ठीक होते थे। उनका गणना का प्रतिरूप लगभग हमेशा सही होता था। इसके विपरीत, स्कूल के विद्यार्थी किसी समस्या के हल के लिए अक्सर गलत क्रिया का इस्तेमाल करते हैं और बेतुके उत्तर निकालते हैं। रोजमर्रा के गणित में संस्कृति और संज्ञान मिलकर काम करते हुए प्रतीत होते हैं जिससे उपयुक्त प्रतिरूप गढ़ने का मजबूत आधारबोध पैदा होता है। जब बच्चों को उनकी समझ में आने लायक कोई सवाल दिया जाता है और उसे हल करने के लिए उन्हें अपना तरीका ढूँढने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है तो हम देखते हैं कि उनकी हल करने की सहज विधियाँ अक्सर रोजमर्रा के गणित जैसी होती हैं। अध्ययनों से सामने आए इन तथ्यों से गणित के पढ़ाने और सीखने के लिए महत्वपूर्ण निहितार्थ निकलते हैं। उदाहरण के लिए, हम सीखने के ऐसे मार्गों की नई कल्पना कर सकते हैं जिसमें रोजमर्रा की गणित की समस्याओं, अवधारणाओं और विधियों को आधार की तरह प्रयोग कर गणित की अधिक शक्तिशाली अवधारणाओं की ओर छलांग भरी जा सके। जानकारी से भरपूर, बच्चों के परिचित प्रसंग किसी सवाल को हल करने के लिए, उत्तर के तर्कसंगत होने की जाँच करने के लिए और प्रश्नों को भिन्न दृष्टिकोणों से देखने के लिए एक मूल्यवान ढाँचा प्रदान करते हैं।

परन्तु यदि हम सांस्कृतिक ज्ञान को औपचारिक गणित, जो वैसे ही 'निगलने में कठिन' होता है, को बच्चों तक पहुँचाने के लिए केवल एक वाहन की तरह देखते हैं तो शायद हम काफी संकीर्ण दृष्टि अपना रहे हैं। संस्कृति की खान में जो कुछ उपलब्ध है, हम एक स्रोत की तरह उसका उत्खनन किसी खास पाठ्यक्रम को आगे बढ़ाने के लिए नहीं कर सकते। सांस्कृतिक ज्ञान को

औपचारिक ज्ञान के साथ रखने से शिक्षाकर्मियों की तरह हम दोनों के सम्बन्ध पर अधिक गहराई से चिन्तन कर सकेंगे। हमें न केवल संस्कृति के गणितीय सोच के स्रोतों से लेने की जरूरत है बल्कि संस्कृति को वे चीजें वापस देने की भी जरूरत है जिन्हें वह बहुत मूल्यवान मानती है। दीर्घकालिक दृष्टि से यदि ज्ञान के किसी स्वरूप को बने रहना है और समृद्ध बनना है तो संस्कृति में उसकी गहरी जड़ें होना चाहिए। विभिन्न विषयों के औपचारिक ज्ञान तथा संस्कृति के हिस्से की तरह फैले हुए ज्ञान के संगमबिन्दुओं को हम ठीक से नहीं समझते। क्या संस्कृति में व्याप्त ज्ञान की विश्वविद्यालयों के शैक्षणिक ज्ञान से कतई तुलना नहीं की जा सकती, जैसा कि शिक्षा जगत के कुछ विचारकों का तर्क है (डाउलिंग, 1993)? क्या लोकज्ञान और औपचारिक ज्ञान, या पारम्परिक और आधुनिक ज्ञान का जाना–माना विभाजन ही दोनों तरह के ज्ञान के बीच के सम्बन्ध का सही निरूपण हैं? ज्ञान के कुछ क्षेत्रों में औपचारिक संस्थाओं के माध्यम से काफी लम्बे समय से सांस्कृतिक प्रसार और संचार को सशक्त तरीके से होता हुआ देखा गया है। इसका एक अच्छा उदाहरण भारतीय शास्त्रीय संगीत है। एक अन्य उदारहण पारम्परिक चिकित्सा ज्ञान है, जिसको अब आधुनिक शिक्षा संस्थाओं के माध्यम से पुनर्स्थापित किया गया है। औपचारिक तंत्रों की तरह संगीत और चिकित्सा, दोनों ही विविध सांस्कृतिक स्वरूपों – लोकप्रिय संगीत या अनेक स्थानीय और विशिष्ट परम्पराओं – से अपना जुड़ाव बनाए रखते हैं। परन्तु इसकी तुलना में स्कूल में हम जो अधिकांश ज्ञान प्रदान करने का प्रयास करते हैं, संस्कृति में न तो उसकी ऐसी उपस्थिति होती है और न ही उसकी अभिव्यक्ति के विविध रूप होते हैं।

हमारी संस्कृति में हो सकता है गणित की ऐसी जड़ें हों जिनका हमें पता लगना अभी भी बाकी है। मुसहरी समुदाय के कुछ लोगों में गणितीय उलझनों या पहेलियों तथा उनके हलों का प्रभावशाली ज्ञान होता है। ये पहेलियाँ 'कुट्टक' कहलाती हैं, जो गणित की एक तकनीक का नाम है, जिसका सबसे पुराना विवरण पाँचवीं सदी ईसवीं के आर्यभटियम में मिलता है। 'कुट्टक' एक महत्वपूर्ण और शक्तिशाली तकनीक है जिससे आगे चलकर भारतीय गणित में महत्वपूर्ण विकास हुए। ब्रम्हगुप्त ने छठवीं ईसवीं सदी में बीजगणितीय तकनीकों की चर्चा 'कुट्टक गणित' कहकर की है। हो सकता है कि मुसहरी पहेलियों, जिनमें समीकरणों को हल करना होता है, ने गणित की इस और भी ज्यादा गहरी परम्परा से सम्बन्ध को बचाकर रखा हो। यह अचरज की बात है कि ऐसा ज्ञान एक ऐसे समुदाय में पाया जाता है जो सामाजिक ऊँच–नीच की व्यवस्था में बहुत नीचे आता है। विभिन्न सामाजिक स्तरों वाले समुदायों के बीच गणितीय ज्ञान के सांस्कृतिक आदान–प्रदान के बारे में हमें बेहतर समझ की जरूरत है। गणितीय ज्ञान के पुनर्उत्पादन और प्रसार में संस्कृति न केवल कामकाज के द्वारा बल्कि खेल के द्वारा भी सहायक होती है। पारम्पारिक कला विधाओं, जैसे संगीत, के डिजिटल तकनीकों के माध्यम से पुनर्जीवित होने और नए आकार लेने से कला और गणित को जोड़ने वाली ऐसी सम्भावनाओं का संकेत भी मिलता है जिन्हें अभी भी तलाशा जाना है।

'रोजमर्रा' के गणित और औपचारिक गणित के सम्बन्ध को एक भिन्न चश्मे से देखने पर पता चलता है कि राजनैतिक पहलू भी इसमें भूमिका निभाते हैं। जैसा कि अनेक लेखकों ने तर्क दिया है, आधुनिक प्रौद्योगिक समाजों की गणितीय विज्ञान पर बढ़ती हुई निर्भरता के चलते, गणित रोजमर्रा की जिन्दगी से और भी ज्यादा दूर हटकर रहस्यमय आवरणों में छिप गया है। तकनीकी उपकरण जिस जटिल गणित पर आधारित होते हैं न केवल वह आम आदमी की पहुँच से दूर है, बल्कि हो सकता है कि रोजमर्रा का वाणिज्य भी गणितीय सोच–विचार से खाली हो जाए। प्रौद्योगिकी ने दैनिक जीवन के वित्तीय लेन–देन के सन्दर्भ में, जिससे करीब–करीब सभी का सम्बन्ध होता है, गणित को अनावश्यक बना दिया है। कैलकुलेटर, ईएमआई की तालिकाएँ और अन्य सहायक उपकरण जादुई काले बक्सों जैसे काम करते हैं जो तर्क और गणना की जगह ले लेते हैं। इससे कौशल की क्षति होती है और बुनियादी गणित से ध्यान और रुचि हट जाती है। हमारे द्वारा किए गए एक छोटे अध्ययन में हमने पाया कि क्रैडिट कार्ड व्यवस्था कैसे काम करती है और ब्याज की प्रभावी दर क्या है, ऐसे महत्वपूर्ण मुद्दों की जानकारी का शिक्षित उपयोगकर्ताओं में गहरा अभाव था। इस प्रकार समाज के बढ़ते हुए गणितीकरण के साथ ही दूसरी ओर उसके नागरिकों का अगणितीकरण, अर्थात् उनके गणितबोध का क्षय होना, भी हो रहा है। चूँकि गणित स्कूली पाठ्यक्रम के एक अनिवार्य अंग की तरह स्थापित हो चुका है, इसलिए वह एक भिन्न सामाजिक भूमिका निभाने लगता है – वह बहुत बड़ी संख्या में लोगों की छँटनी करके उन्हें गणित और विज्ञान, जो आधुनिक समाज का स्वरूप निर्धारित करते हैं, तक किसी भी प्रकार की पहुँच हासिल करने से वंचित कर देता है।

अनौपचारिक आर्थिक क्षेत्र के अंग की तरह छोटे पैमाने की उत्पादक गतिविधियों के आविर्भाव ने गरीब परिवारों को जीविका के साधन के साथ–साथ संगठित अर्थव्यवस्था में होने वाले परिवर्तनों के कठोर प्रहार का प्रतिरोध करने का उपाय भी मुहैया करवाया है। अगणितीकरण के बारे में उपरोक्त चर्चा को देखते

हुए हम यहाँ एक समानान्तर प्रवृत्ति को रेखांकित करने का अवसर नहीं छोड़ सकते। अगणितीकरण की बढ़ती हुई प्रवृत्ति के खिलाफ सड़क के या कामकाज के गणित का आविर्भाव एक ऐसी प्रतिकूल प्रवृत्ति है जो सुविधाविहीन लोगों के गणित के पूरी तरह कट जाने का प्रतिरोध करती है। हालाँकि इसका आविर्भाव अपने आप में महत्वपूर्ण गणित तक पहुँचाने की सामर्थ्य नहीं रखता। परन्तु शिक्षा संस्थाएँ इस सम्भावना का विस्तार कर सकती हैं, हो सकता है कि रोजमर्रा के गणित को पाठ्यक्रम में लाने से समाज के अधिक से अधिक वर्गों तक गणित को ले जाने का मार्ग भी प्रशस्त हो सके।

लेख में आए सन्दर्भ

1. Carraher (Nunes), T.N., Carraher, D.W., and A. D. Schliemann, (1985) Mathematics in the Streets and in Schools. British Journal of Developmental Psychology, 3, pp. 21–29.
2. Khan Farida Abdulla (2004 Living, Learning and Doing Mathematics: A Study of working class children in Delhi, Contemporary Education 3. Dialogue,2,pp.199-277.
3. Saxe.G.B. & Esmonde, I.(2005). Dowling, P. (1995) 'Discipline and Mathematise: the myth of relevance in education', Perspectives in Education, 16, 2. Available at http://homepage.mac.com/paulcdowling/ioe/publications/dowling1995/index.html
4. Saxe, G.B., & Esmonde, I. (2005). Studying cognition in flux: A historical treatment of fu in the shifting structure of Oksapmin Mathematics. Mind, Culture, & Activity. Available at http://lmr.berkeley.edu/docs/saxe_esmonde_mca1234_2.pdf. Accessed 27-01-2010.

के सुब्रमण्यम *होमी भाभा सेन्टर फॉर साइंस ऐजुकेशन, मुम्बई में कार्यरत हैं। वर्तमान में उनके कार्य के प्रमुख क्षेत्र हैंः प्राथमिक और माध्यमिक स्तर पर गणित पढ़ाने के तरीकों पर शोध करना तथा गणित के शिक्षकों के व्यावसायिक विकास के प्रतिरूप विकसित करना। उनकी अन्य रुचियाँ हैं संज्ञानात्मक विज्ञान तथा दर्शन, विशेष रूप से जिसका सम्बन्ध शिक्षा और गणित के सीखने से हो। उनसे* ravi.k.subra@gmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

खण्ड ब

कुछ परिप्रेक्ष्य

5 संख्या के शिक्षण में संरचना और खेल की भूमिका

शैलेष शिराली



संख्या की अवधारणा गणित का केन्द्रीय तत्व है, पर हो सकता है कि इसकी उत्पत्ति हमारे लिए हमेशा एक रहस्य रहे क्योंकि वह सुदूर अतीत में कहीं छिपी हुई है। मनुष्यों ने चीजों को दर्ज करने के लिए गणना रेखाओं का तरीका (टैली सिस्टम) इस्तेमाल करना निश्चित ही बहुत समय पहले शुरू किया होगा – लेकिन ठीक–ठीक कब, यह शायद हमें कभी पता नहीं चलेगा। बेल्जियम कॉंगो में 1960 में खोजी गई इशांगो हड्डी, जो ईसापूर्व 20000 वर्ष पुरानी है, से संकेत मिलता है कि गणितीय सोच के बीज, जितना माना जाता था, शायद उससे और पहले अंकुरित हुए होंगे। इस हड्डी पर उकेरी गई गणना रेखाओं (टैली मार्क्स) को जान–समझकर समूहों में बनाया गया है जो एक गणितीय संरचना जैसी प्रतीत होती है (उसमें दोगुनी होती हुई संख्याओं की शृंखला का संकेत भी मिलता है: 2, 4, 8)। पर जब तक और अधिक प्रमाण नहीं खोज लिए जाते तब तक यह



एक तरह की अटकलबाजी ही रहेगी। ज्यादा जानकारी के लिए आप विकीपीडिया में http://en.wikipedia.org/wiki/Ishango_bone पर दी गई जानकारी देख सकते हैं।

रेखाओं से गिनती करने का प्रचलन 50000 वर्षों जितना पुराना भी हो सकता है, और विभिन्न सन्दर्भों में, जैसे कि कक्षा के चुनाव में, हम आज भी गणना करने के लिए इसका उपयोग करते हैं।

दस के आधार वाली संख्या प्रणाली

संख्याओं के जो चिन्ह हम आज इस्तेमाल करते हैं –दस–आधारित या दशमलव प्रणाली– का स्रोत प्राचीन प्रचलनों में है। बहुत समय पहले बैबीलोन के लोग 60 के गुणकों पर आधारित प्रणाली का उपयोग करते थे। उस चलन के कुछ चिन्ह आज भी बचे हुए हैं – अभी भी हमारे एक मिनिट में 60 सेकेण्ड होते हैं और एक घण्टे में 60 मिनिट। कोणीय मापन के लिए भी एक डिग्री में 60 मिनिट होते हैं। बाद में मिस्र के लोगों ने दस की घातों पर आधारित प्रणाली विकसित की जिसमें 10 से लगाकर 10 लाख तक हर घात को उसके अपने विशेष चिन्ह से दर्शाया जाता था। पर इसमें हमारी प्रणाली से एक महत्वपूर्ण अन्तर था –इसमें शून्य के लिए कोई चिन्ह नहीं था।

शून्य के चिन्ह के बिना अंकगणित की कोई प्रणाली दो कठिनाइयों से ग्रस्त होती है। पहली यह कि इसमें ऐसी संख्याओं के बीच भ्रम पैदा होता है, जैसे कि 23, जो 2 दहाइयों तथा 3 इकाइयों को दर्शाती है, तथा 203 जो 2 सैकड़ा और 3 इकाइयों को दर्शाती है। शून्य के चिन्ह के अभाव में, कोई अन्य ऐसा तरीका खोजना होगा जो दर्शा सके कि किसी 2 का अर्थ '2 सौ' है न कि '2 दस'। यह किया तो जा सकता है, पर इसका तरीका काफी बोझिल होता है। लेकिन इससे भी बड़ी कठिनाई यह है कि फिर गणनाएँ बहुत मुश्किल हो जाती हैं और अंकगणित में आगे बढ़ना और भी कठिन हो जाता है।

यूनानी लोगों के पास शून्य के लिए कोई प्रतीक नहीं था, इसलिए आश्चर्य नहीं कि उन्होंने गणित तथा बीजगणित का वैसा विकास नहीं किया जैसा रेखागणित का, जिसे वे बड़ी ऊँचाइयों तक ले गए। शून्य का चिन्ह और उसका प्रयोग करने के नियम, तो भारत में ही अस्तित्व में आए (शायद पाँचवीं सदी ई. जितना पहले)। अतः यह संयोग नहीं है कि भारत में आर्यभट्ट, ब्रम्हगुप्त, महावीर, भास्कराचार्य द्वितीय और अनेक अन्य विद्वानों के हाथों अंकगणित और बीजगणित की बहुत प्रभावशाली ढंग से प्रगति हुई।

> *"अवधारणाएँ सिखाई नहीं जातीं, बल्कि ग्रहण की जाती हैं।" वस्तुओं के समूहों के वास्तविक सम्पर्क में आने से ही व्यक्ति के मस्तिष्क में अवधारणाएँ निर्मित होती हैं।*

वहीं दूसरी ओर, प्राचीन भारतीय रेखागणित के अपने अध्ययन में कतई उतना आगे नहीं गए। लेकिन यह गौर करने की बात है कि एक क्षेत्र जिसमें बीजगणित और विश्लेषण की विधियाँ सहज ढंग से रेखागणित में प्रवेश करती हैं, अर्थात् त्रिकोणमिति, की उत्पत्ति अवश्य ही भारत में हुई (पाँचवीं ईसवीं सदी की आर्यभट्ट की कृति में)।

अमूर्तकरण एवं संख्या की अवधारणा

हमारे मस्तिष्क में अन्तर्निहित एक असाधारण क्षमता है? अवधारणाएँ निर्मित करने की क्षमताएँ वस्तुओं या गतिविधियों के

समूहों में साझा विशेषता और गुणों को अमूर्त रूप में देख सकने की क्षमता। यही क्षमता है जो भाषा के निर्माण का आधार बनती है, और यही हमें संख्याओं का 'आविष्कार' करने के काबिल बनाती है। इसका क्या तात्पर्य है, यह समझने के लिए, किसी संख्या, मान लीजिए कि तीन, के बारे में सोचिए। क्या तीन अपने आपमें कोई वस्तु है? क्या यह कहीं स्थित हो सकती है? नहीं, नहीं हो सकती, लेकिन हमारे दिमाग में 'तीनपन' का गुण देख पाने की क्षमता हैः तीन उँगलियाँ, तीन चिड़ियाँ, तीन बिल्ली के बच्चे, तीन पिल्ले, तीन लोग – तीनपन का गुण इनकी साझा विशेषता है। यह क्षमता हमारे मस्तिष्क की संरचना में ही निहित है। यदि यह नहीं होती तो हम कभी भी संख्या की अवधारणा नहीं सीख पाते। असल में ऐसी कोई भी अन्य अवधारणा नहीं सीख पाते क्योंकि कोई भी अवधारणा अन्ततः अमूर्त होती है।

गणना रेखाओं से गिनती करने – वस्तुओं के किसी समुच्चय और गणना रेखाओं के समुच्चय में 1 का 1 से पारस्परिक सम्बन्ध स्थापित करने – जैसी सरल बात में भी हमारा मस्तिष्क अमूर्तकरण करने की नैसर्गिक क्षमता प्रदर्शित करता हैः वह जानबूझकर विभिन्न वस्तुओं की खासियतों को नजर अन्दाज करके, उन्हें निराकार इकाइयों की तरह देखता है।

अध्यापनकला की दृष्टि से इस अन्तर्दृष्टि का एक महत्वपूर्ण परिणाम इस बुद्धिमत्तापूर्ण कथन से प्रकट होता है कि, ''अवधारणाएँ सिखाई नहीं जातीं, बल्कि ग्रहण की जाती हैं''। वस्तुओं के समूहों के वास्तविक सम्पर्क में आने से ही व्यक्ति के मस्तिष्क में अवधारणाएँ निर्मित होती हैं। अभी भी इसे अच्छे से नहीं समझा जा सका है कि यह ठीक–ठीक कैसे होता है। लेकिन यहाँ मुझे बहुत पहले सुकरात द्वारा की गई एक टिप्पणी याद आती है– *शिक्षक की भूमिका बहुत कुछ एक दाई जैसी होती है जो प्रसव में सहायता करती है।*

बीजगणित का आविष्कार अमूर्तकरण की सीढ़ी में एक कदम ओर ऊपर की अवस्था को निरूपित करता है। इसका क्या अर्थ है यह समझने के लिए आइए हम इन संख्यात्मक तथ्यों की पड़ताल करेंः 1+3 = 4, 3 + 5 = 8, 5 + 7 = 12, 7 + 9 = 16, 9 + 11 = 20। हमें यहाँ एक स्पष्ट विन्यास दिखाई देता है कि लगातार क्रम में आने वाली दो विषम संख्याओं का योग हमेशा 4 का गुणक होता है। इस वक्तव्य की ऐसे सभी सम्भावित सम्बन्धों की सूची बनाकर पुष्टि नहीं की जा सकती, क्योंकि वे बहुत अधिक हैं – वास्तव में वे अनन्त हैं। लेकिन यहाँ हम बीजगणित के तरीके इस्तेमाल कर सकते हैं। हमें केवल इस प्रेक्षण को एक बीजगणितीय वक्तव्य में अनूदित करना पड़ता है $(2n - 1) + (2n + 1) = 4n$; यह इस कथन को तत्काल सिद्ध कर देता है। ऐसी है बीजगणित की ताकत और अमूर्तकरण की भी ताकत – और यह क्षमता भी हमारे मस्तिष्क में स्वाभाविक रूप से निहित है।

संख्याओं की संरचनाएँ

मस्तिष्क की एक अन्य नैसर्गिक विशेषता है खेल की इच्छा और क्षमता। लगता है कि यह अधिकांश स्तनपाइयों में होती है, जैसा कि हमें उनके बच्चों की खेलने की हरकतों में दिखता है। कितना मजेदार होता है बिल्ली के बच्चों, पिल्लों या शिशु बन्दरों को खेलते हुए देखना। लेकिन मनुष्यों में इसके आगे एक और क्षमता होती है; अपने खेलों में नियमित संरचनाएँ निर्मित कर सकना। जब हमारा क्रीड़ा प्रेम हमारे संरचना प्रेम और संख्या की अवधारणा से जुड़ जाता है तो गणित का जन्म होता है क्योंकि गणित अन्ततः संरचनाओं का विज्ञान है।

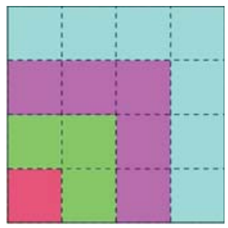
गणित में निहित क्रीड़ा–तत्व को समझना बेहद जरूरी है क्योंकि हमसे बार–बार गणित की उपयोगिता का बखान किया जाता है कि कैसे यह जीवन के इतने सारे क्षेत्रों में केन्द्रीय भूमिका निभाता है, और कैसे यह कार्यक्षेत्र में व्यक्ति की प्रगति के लिए महत्वपूर्ण है। पर इस दृष्टिकोण में खेल का तत्व उपेक्षित रह जाता है, और यह ऐसा विषय बनकर रह जाता है जिसे जानना अनिवार्य होता है। और इस तरह गणित से एक लम्बे समय तक चलने वाले भयभीत रिश्ते की बुनियाद रख दी जाती है।

अति प्राचीन समय से – बैबीलोन, यूनान, चीन और भारत में – संख्याओं की संरचनाओं और संख्याओं से जुड़ी रैखिक आकृतियों के प्रति एक कौतुकपूर्ण आकर्षण रहा है। इसी से संख्या परिवारों की उत्पत्ति हुई है – अभाज्य संख्याएँ, त्रिकोणीय संख्याएँ, वर्ग संख्याएँ इत्यादि।

जरा देखें कि इस सन्दर्भ में 'संरचना' शब्द से क्या अर्थ है। हम गिनती करने वाली संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.... को दो उपवर्गों में बाँटते हैं, विषम संख्याएँ (1, 3, 5, 7, 9, 11...), तथा सम संख्याएँ (2, 4, 6, 8, 10, 12...)। यदि हम विषम संख्याओं के लगातार बढ़ते हुए योग को लिखते जाएँ तो हम पाते हैं किः 1, 1+3=4, 1+3+5=9, 1+3+5+7=16, 1+3+5+7+9=25. वाह! यह तो हमें पूर्ण वर्ग संख्याओं की सूची प्राप्त हो गई !

लगातार क्रम में आने वाली विषम संख्याओं के योगों और वर्ग संख्याओं के बीच के सम्बन्ध को दर्शाने वाला एक बढ़िया तरीका है; यह देखने में मजेदार होने के साथ–साथ एकदम मन में उतर जानेवाला है। हमें बस अगले पेज पर बने चित्र पर गौर करना है? इस गुण का घनिष्ठ सम्बन्ध त्रिकोणीय संख्याओं से है, अर्थात् इस श्रेणी सेः 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55... जो गणना संख्याओं के

लगातार योगों से बनती हैः 1, 1+2=3, 1+2+3=6, 1+2+3+4=10, आदि। ये त्रिकोणीय संख्याएँ इसलिए कहलाती हैं क्योंकि इन संख्याओं के साथ हम त्रिकोणीय आकृतियों का सम्बन्ध जोड़ सकते हैं। लाल चौखाना केवल एक है; जब हम इससे सटाकर तीन हरे चौखाने रख देते हैं तो वे मिलकर 2 गुणित 2 का वर्ग बना देते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि 1+3= 2 गुणित 2।

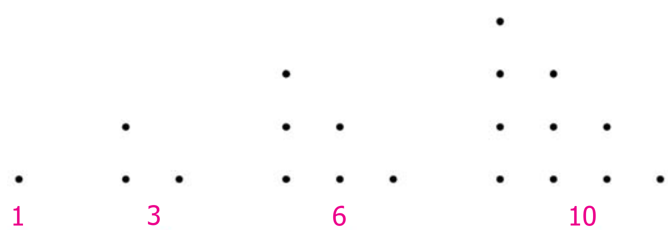


फिर उसके आगे पांच बैंगनी चौखाने जोड़ दें तो अब आपको 3 गुणित 3 का वर्ग प्राप्त होगा। इसलिए 1+3+5= 3 गुणित 3।

इसके बाद सात नीले चौखाने रख दें तो आपको 4 गुणित 4 का वर्ग मिलेगा, इसलिए 1+3+5+7= 4 गुणित 4, और इसी प्रकार आगे भी।

त्रिकोणीय संख्याओं को वर्ग संख्याओं (1, 4, 9, 16 आदि) से जोड़ने वाले दो महत्वपूर्ण गुण हैं, और बच्चे इन्हें आसानी से ढूँढ सकते हैंः (1) दो लगातार त्रिकोणीय संख्याओं का योग एक वर्ग संख्या होती है, उदाहरण के लिए , 1+3=4, 3+6=9, 6+10=16... (2) यदि किसी त्रिकोणीय संख्या में 8 का गुणा करके उसमें 1 जोड़ दिया जाए तो हमें वर्ग संख्या प्राप्त होती है, जैसे कि (8X3) + 1 = 25, (8X6) + 1 = 49, (8X10) + 1 = 81

इनमें ऐसा बढ़िया सम्बन्ध क्यों है? मनन करने के लिए यह मजेदार प्रश्न है, है न?



यहाँ एक और संरचना है। लगातार क्रम में कोई भी तीन संख्याएँ लें, जैसे कि 3, 4, 5। बीच की संख्या का वर्ग करने पर हमें 16 मिलता है। बाहरी दोनों संख्याओं का आपस में गुणा, 3 X 5 करने पर हमें 15 मिलता है। गौर करें कि 16 – 15 =1; इस तरह प्राप्त दोनों संख्याओं में 1 का अन्तर है। किसी अन्य त्रिगुट के साथ इसे आजमा कर देखें, जैसे 7, 8, 9: 8 का वर्ग है 64, 7 गुणित 9 है 63 और 64 – 63 = 1, फिर हमें 1 का अन्तर प्राप्त होता है। क्या यह सिलसिला आगे भी जारी रहेगा? हाँ, और इसे बीजगणित का प्रयोग करके आसानी से दिखाया जा सकता है; लेकिन जरा सोचिए कि संख्याओं से खेल रहे किसी छोटे बच्चे के इस सम्बन्ध को खोज लेने पर उसे कितना आनन्द मिलेगा!

हमें इसी के समान, पर इससे अधिक जटिल एक संरचना फिबोनाची क्रम में मिलती है जो इस प्रकार है 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55,...; यहाँ पहली दो संख्याओं के बाद आने वाली हर संख्या उससे पिछली दो संख्याओं का जोड़ है (जैसे कि 8 = 5 + 3)। ऊपर की गई गणना को इस क्रम के साथ दोहराएँ । त्रिगुट 2, 3, 5 के साथ हम पाते हैं कि 3 का वर्ग 9 है, और 2 से 5 का गुणनफल 10 है; इस प्रकार बीच की संख्या का वर्ग अन्य दोनों संख्याओं के गुणनफल से 1 कम है। त्रिगुट 3, 5, 8 में हम पाते हैं कि 5 का वर्ग है 25, और 3 गुणित 8 है 24, अब वर्ग संख्या 1 अधिक है। आगे 5, 8, 13 में हमें दिखता है 8 गुणित 8 है 64, और 13 गुणित 5 है 65, इस बार फिर वर्ग संख्या अन्य दो के गुणनफल से 1 कम है। और यह सिलसिला ऐसा ही चलता रहता है एक विचित्र, बारी–बारी से उलटी होती हुई संरचना।

यही बात हमें चार क्रमिक फिबोनाची संख्याओं के समूहों का अध्ययन करने पर भी दिखाई देती है, उदाहरण के लिए 1, 2, 3, 5 में बाहरी दो संख्याओं का गुणनफल है 5 और भीतरी दो का गुणनफल है 6; अर्थात् उनमें 1 का अन्तर है। ऐसा एक अन्य समूह लें 3, 5, 8, 13, बाहरी दो का गुणनफल है 39 और भीतरी दो का है 40, एक बार फिर 1 का अन्तर है। और यहाँ भी बारी–बारी से उलटी संरचना दिखती है। चकित करने वाली बात यह है कि प्रकृति को भी फिबोनाची संख्याओं का उपयोग करना उचित लगता है। यदि हम विभिन्न फूलों में पंखुड़ियों की संख्या का निरीक्षण करके दर्ज करें तो हम पाते हैं कि वह आमतौर पर फिबोनाची संख्या होती है। सूरजमुखी के फूल के बीच में परागकणों की कुण्डलीदार जमावट का अध्ययन करने पर आप पाएँगे कि ये कुण्डलियाँ घड़ी की सुई की दिशा में और उसके विपरीत दिशा में घूमती हैं, आप पाएँगे कि प्रत्येक प्रकार की कुण्डलियों की संख्या एक फिबोनाची संख्या है। प्रकृति भी संरचनाओं की उतनी ही शौकीन है जितने हम!

कई वर्ष पहले मैंने एक पाठ्यपुस्तक इस्तेमाल की थी जिसका नाम था 'संरचनाएँ और गणित की शक्ति'। पाठ्यपुस्तक के लिए यह अच्छा शीर्षक है क्योंकि यह पूरा विषय ही संरचनाओं के बारे में है, और यही इसे इसकी चमत्कारी शक्ति देता है। पर और भी महत्वपूर्ण बात यह है कि सबसे पहले यही विशेषता हमें इस विषय का अध्ययन करने को आकर्षित करती है।

बड़ी संख्याएँ , छोटी संख्याएँ

संख्याएँ होती हैं, और फिर बड़ी संख्याएँ होती हैं। बच्चों को स्वाभाविक रूप से बड़ी संख्याएँ अच्छी लगती हैं, और उनमें से कई अपने आप यह खोज लेते हैं कि कोई अन्तिम संख्या नहीं होती, कोई कितनी भी बड़ी संख्या क्यों न बताए, उससे बड़ी

संख्या पाने के लिए बस उसमें 1 जोड़ने की जरूरत होती है। इसलिए संख्याओं के संसार की कोई सीमा नहीं होती! कुछ बच्चे ऐसी ही खोज दूसरे छोर पर छोटी संख्याओं के सम्बन्ध में कर लेते हैं। मुझे याद आता है कि कई साल पहले एक छात्रा ने मुझे बताया था कि कैसे वह किसी संख्या को सिर्फ बार–बार आधी करके छोटी से छोटी होती हुई भिन्न संख्याओं की अन्तहीन शृंखला प्राप्त कर सकती थी; उसे यकीन नहीं हो रहा था कि इतनी छोटी संख्याएँ भी हो सकती थीं। उसने यह विस्मयकारी खोज अपने आप की थी, और वह इससे बहुत रोमांचित थी।

प्राचीन भारतीयों को बड़ी संख्याओं से प्रेम था, और यहाँ इस प्रेम को दर्शाने वाली एक समस्या प्रस्तुत है। यदि मैं आपसे ऐसी वर्ग संख्या ढूँढने को कहूँ जो किसी दूसरी वर्ग संख्या की दोगुनी हो, तो आप कभी सफल नहीं होंगे क्योंकि ऐसी संख्याओं के कोई भी जोड़े नहीं होते। (क्यों?– इसके पीछे एक बढ़िया कहानी है, पर हम अभी इसमें नहीं जा सकते।) इसलिए हम सवाल को थोड़ा बदल देते हैं: अब मैं ऐसी वर्ग संख्या पूछता हूँ जो किसी दूसरी वर्ग संख्या के दोगुने से 1 अधिक हो। अब हमें कई उत्तर मिलते हैं, जैसे कि 9 तथा 4 वर्ग संख्याएँ हैं, और 9 (2 X 4) = 1. नीचे कुछ और हल हैं:

289 - (2 X 144) = 1,
9801 - (2 X 4900) = 1,

यदि हम सवाल में 'दोगुने' शब्द की जगह '5 गुने' कर दें तो हमें उसके भी हल मिलते हैं:

81 - (5 X 16) = 1,
(161 X 161) - (5 X 72 X 72) = 1,

तथा इसी प्रकार और भी।
सातवीं सदी में ब्रम्हगुप्त ने सोचा कि '5 गुने' के स्थान पर '61 गुने' रखने पर क्या इस समस्या का कोई हल मिल सकता था। इस मामले में सबसे छोटा उत्तर भी वास्तव में बहुत विशाल है – फिर भी ब्रम्हगुप्त ने उसे खोज निकाला:

(1766319049 x 1766319049)- (61 x 226153980 x 226153980)= 1.
आप चाहें तो इसकी पुष्टि कर सकते हैं।

मुझे लगता है कि इस गणना का काल महत्वपूर्ण है – भारतीय 13 सदियों पहले ऐसे सवाल पूछ रहे थे। खेल के प्रति प्रेम सभी मानवीय सभ्यताओं में दीर्घ काल से रहा है। मनुष्य खेले बिना नहीं रह सकता।

लेकिन अब एक विचित्र बात होती है। जो खेल की तरह शुरू हुआ उसमें जैसे पंख लग जाते हैं और वह परिपक्व विषय बनकर उड़ान भरने लगता है। उसकी आन्तरिक गठन व संरचना इतनी सशक्त होती है कि वह पदार्थों, प्राणमय देहों और पूँजी के संसार में 'असली संसार' में हर जगह उपयोगी साबित होता है। ऐसी उड़ानें इतिहास में दो दर्जन या उससे अधिक बार घटित हुई हैं और कोई सचमुच में नहीं जानता कि वे क्यों और कैसे घटती हैं, लेकिन वे होती हैं। शायद यह हमारे लिए परमात्मा का उपहार है। (लेकिन हम हमेशा उसका वांछित उपयोग नहीं करते। गणितीय विधियों की ताकत का उपयोग आणविक बमों, पनडुब्बियों और जनसंहार के दूसरे उपकरणों की डिजाइन में भी होता है।)

अन्तिम टिप्पणी

ऐसे अनेक विषय–प्रसंग हैं जिनमें गणित में निहित खेल और संरचना की खूबियाँ उभरकर सामने आती हैं:

- जादुई वर्ग (नौ संख्याओं के दिए गए समूह को 3X3 की कतारों में, या 16 संख्याओं को 4 X 4 की कतारों में इस तरह जमाना कि पंक्ति योग, स्तम्भ योग, विकर्ण योग सभी बराबर हों); इनसे न केवल संख्याओं के मजेदार सम्बन्ध उजागर होते हैं, बल्कि इनके अध्ययन में हम समरूपता के बारे में भी सीखते हैं।
- कूटगणित (क्रिप्टारिथिम्स) अंकगणित की ऐसी पहेलियाँ हल करना जिनमें अंकों के स्थान पर अक्षर रख दिए जाते हैं: उदाहरण के लिए ON + ON + ON + ON = GO; ऐसी समस्याओं के अध्ययन से कई सरल मगर आनन्ददायी गणितीय अन्तर्दृष्टियों का पता चलता है।
- अंकों की संरचनाएँ (2 की बढ़ती हुई घातसंख्याओं के इकाई अंकों की सूची बनाएँ; आपको क्या विशेष दिखाई देता है? अब यही 3 की घात संख्याओं के साथ करें; आपको क्या दिखाई देता है?)

ये उदाहरण संख्याओं के इर्द–गिर्द बुने गए हैं, लेकिन यह सिद्धान्त स्पष्ट रूप से रेखागणित में भी लागू होता है। यहाँ हम ऐसी आकृतियों का अध्ययन करते हैं जैसे रंगोली और कोलम, कागज मोड़ने से बनी या गोलों से बनी आकृतियाँ इत्यादि।

ऐसी गतिविधियों के साथ–साथ, अध्यापक गणित की समाज में भूमिका से सम्बन्धित प्रश्न भी उठा सकते हैं जिन पर विद्यार्थियों और साथी शिक्षकों के साथ चर्चा की जा सकती है। उदाहरण के लिए, विनाश के लिए गणित के इस्तेमाल से सम्बन्धित प्रश्न, या अधिक व्यापक सन्दर्भ में, 'गणित का इस्तेमाल करना कब उपयुक्त है?' या यह सवाल कि समाज क्यों गणितीय गतिविधि को सहारा देना चाहेगा? आखिरकार, अधिकांश कलाकारों को उनके कलाकर्म के लिए संरक्षक या खरीदार मिल जाते हैं, लेकिन

गणितज्ञ जीविका के लिए खुद को नहीं बेचते। क्या ऐसा है कि नीति–निर्माता गणित को एक उपयोगी औजार के रूप में देखते हैं, और इसलिए इस क्षेत्र में लोगों को अध्यापन या उपयोगी गणित करके अपना जीविकोपार्जन कर पाने में सहायक होते हैं? पर उपयोगिता का प्रश्न हमें वापस उपयोग के औचित्य के सवाल पर ले जाता है। आमतौर पर ऐसे सवालों को गणित की कक्षा के उपयुक्त नहीं माना जाता, लेकिन चर्चा करने और पूछने की संस्कृति को बढ़ावा देने में निश्चित ही उनकी जगह है।

हमें यहाँ पूरी सूची बनाने की जरूरत नहीं है– यह सम्भव नहीं है क्योंकि यह बड़ी लम्बी सूची है और बढ़ती ही जाती है। इसके बजाय यहाँ हम सिर्फ इस बात पर जोर देना चाहते हैं, कि अध्यापनकला और मनोविज्ञान, दोनों दृष्टियों से संरचना और खेल गणित के शिक्षण के लिए महत्वपूर्ण हैं।

जब हम गणित को एक ऐसा भारी और गम्भीर विषय बना देते हैं जो केवल अतिप्रतिभाशाली लोगों के लिए ही है, और जिसे जबरदस्त स्पर्धा के माहौल में ही सीखा जाता है, तो हम एक बड़ा अवसर खो देते हैं। यह अनेक लोगों को गणित के अनुभव से वंचित कर देता है।

पढ़ने योग्यः लेखक का सुझाव

1. http://en.wikipedia.org/wiki/Ishango_bone
2. “Number, The Language Of Science” Tobias Dantzig
3. “The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics” Stanislas Dehaene
4. http://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Mathematics

शैलेष शिराली *ऋषि वैली स्कूल के सामुदायिक गणित केन्द्र के प्रमुख हैं। वे 13–19 वर्ष के छात्रों के लिए लिखी गई गणित की कई पुस्तकों के लेखक हैं। वे स्नातक स्तर की विज्ञान पत्रिका 'रैज़ोनैन्स' के सम्पादकों में से एक हैं, और देश में गणितीय ओलिम्पियाड से भी जुड़े हैं। उनसे* shailesh_shirali@rediffmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

6 गणित तथा राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा

इन्दु प्रसाद



गणित ज्ञान और अध्ययन के सबसे पुराने क्षेत्रों में से एक है। लम्बे समय से इसे मनुष्य के चिन्तन का एक केन्द्रीय अंग माना जाता रहा है। कुछ लोग इसे विज्ञान मानते हैं, कुछ कला मानते हैं और कुछ ने तो इसे भाषा के जैसा माना है। हालाँकि इसमें तीनों के अंश समाहित प्रतीत होते हैं, फिर भी यह अपने आप में एक अलग वर्ग है।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (एनसीएफ) 2005 के अनुसार स्कूलों में गणित की शिक्षा का मुख्य लक्ष्य बच्चों की सोच का 'गणितीकरण' करना है। विचार की स्पष्टता और आधार मान्यताओं को उनकी तार्किक परिणति तक ले जाना, ये गणित के अभिक्रम के केन्द्रीय तत्व हैं। विचार करने के कई तरीके होते हैं। लेकिन गणित में व्यक्ति जिस तरह विचार करना सीखता है, वह उसे अमूर्त राशियों और अवधारणाओं के साथ काम करने की योग्यता और समस्याओं के हल का मार्ग प्रदान करता है।

एनसीएफ की कल्पना है कि स्कूल में गणित शिक्षा का वातावरण ऐसा हो जिसमें:

1. गणित से भय खाने की बजाय बच्चों को गणित सीखने में आनन्द आए।
2. बच्चे 'महत्वपूर्ण' गणित सीखें जो केवल सूत्रों या यांत्रिक विधियों से कहीं अधिक होता है।
3. बच्चे गणित को ऐसी गतिविधि की तरह देखें जिसके बारे में वे बात कर सकें, जिसकी समझ को सम्प्रेषित कर सकें, आपस में चर्चा कर सकें और जिस पर वे मिलजुल कर काम कर सकें।
4. बच्चे अर्थपूर्ण प्रश्न उठाएँ और उनको हल करें।
5. बच्चे सम्बन्धों को समझने, संरचनाओं को देखने, गुत्थियों को तर्क से सुलझाने तथा वक्तव्यों के सत्य अथवा असत्य होने का तर्क–वितर्क करने के लिए अमूर्त अवधारणाओं का उपयोग करें।
6. बच्चे गणित के बुनियादी ढाँचे को समझें, अर्थात : अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित तथा त्रिकोणमिति, एवं स्कूल की गणित की बुनियादी विषयवस्तु। ये सभी अमूर्तकरण करने, नियमित संरचनाएँ बनाने तथा व्यापकीकरण करने की कार्यप्रणाली प्रदान करते हैं।
7. शिक्षकों से ऐसी अपेक्षा हो कि वे प्रत्येक बच्चे को इस विश्वास के साथ कक्षा में सक्रिय रूप से भागीदार बनाएँ कि हर व्यक्ति गणित सीख सकता है।

वहीं दूसरी ओर, एनसीएफ हमारे स्कूलों के सामने गणित की शिक्षा से सम्बन्धित चुनौतियों का भी इस प्रकार उल्लेख करता है:

1. अधिकांश बच्चों में गणित को लेकर भय और असफलता का भाव व्याप्त होना।
2. ऐसी पाठ्यचर्या जो थोड़े से प्रतिभावान विद्यार्थियों और कक्षा में भाग न लेने वाले निष्क्रिय बहुसंख्यक विद्यार्थियों, एक साथ दोनों को ही निराश करती है।
3. मूल्यांकन के फूहड़ तरीके जो इस धारणा को बढ़ावा देते हैं कि गणित एक यांत्रिक अभिकलन प्रक्रिया है – प्रश्न, प्रश्नावलियाँ, मूल्यांकन के तरीके, यांत्रिक और पुनरावर्ती होते हैं जिनमें अभिकलन पर जरूरत से ज्यादा जोर दिया जाता है।
4. गणित के अध्यापन के लिए शिक्षकों की तैयारी और उनके लिए आवश्यक सहयोग का अभाव होना।
5. सामाजिक भेदभाव के ढाँचे जो गणित की शिक्षा में भी प्रतिबिम्बित होते हैं और जिनके परिणामस्वरूप ऐसी रूढ़िबद्ध धारणाएँ बनती हैं, जैसे कि 'गणित में लड़कियों की अपेक्षा लड़के बेहतर होते हैं।' कठिनाई यह है कि गणनाएँ क्रमशः काफी दुरूह होती जाती हैं और गणित में प्रगति करना उतना ही ज्यादा कठिन होता जाता है।

> *''गणित में सुव्यवस्थित तर्कप्रक्रिया के महत्व पर जितना भी जोर दिया जाए वह कम होगा, और यह सौन्दर्य और शोभा की धारणाओं, जो गणितज्ञों को अतिशय प्रिय हैं, से भी अन्तरंग रूप से जुड़ा है।''*

इसलिए एनसीएफ अनुशंसा करता है कि:

1. गणित शिक्षा का जोर गणितीय विषयवस्तु के 'संकीर्ण' लक्ष्यों को हासिल करने से हटाकर गणित सीखने के ऐसे वातावरण का निर्माण करने पर केन्द्रित किया जाए जहाँ औपचारिक प्रश्नों को हल करने, स्वयं के अनुभवों का उपयोग करने, नियमित संरचनाओं का उपयोग करने, अनुमान लगाने और सन्निकटन करने, सबसे उपयुक्त मूल्य पर पहुँचने, निरूपण करने, तर्क करने और सिद्ध करने,

सम्बन्ध बनाने और गणितीय सम्प्रेषण करने की प्रक्रियाओं को वरीयता दी जाती है।

2. हर विद्यार्थी में सफलता हासिल करने का भाव जगाकर उसे कक्षा में सक्रिय रूप से भागीदार बनाना और साथ ही साथ, उभरते हुए गणितज्ञ के सामने अवधारणात्मक चुनौतियाँ पेश करना।
3. मूल्यांकन के तरीके बदलना ताकि विद्यार्थी के विधियों के ज्ञान की बजाय उसकी गणितीय योग्यताओं की परीक्षा हो।
4. विविध प्रकार के गणितीय संसाधनों से शिक्षकों को समृद्ध बनाना।

एन.सी.एफ. की दृष्टि के प्रमुख केन्द्र बिन्दुओं में से एक बच्चों के मन से गणित का भय दूर करना है। वह स्कूली गणित को सिखाई गई एक विधि का इस्तेमाल करके एक मात्र सही उत्तर निकालने के त्रासदायी शिकंजे से मुक्त करने की बात करता है। उसका जोर पढाई के ऐसे माहौल बनाने पर है जो बच्चों की रुचि और सफलता का स्वाद जगाकर उन्हें सक्रिय रूप से भागीदार बनने का आमंत्रण देते हैं।

सीखने की पद्धतियाँ

एनसीएफ कहता है कि सवालों को हल करने की अनेक सामान्य तरकीबें स्कूल के भिन्न–भिन्न चरणों के दौरान धीरे–धीरे आगे बढ़ते हुए सिखाई जा सकती हैं। जैसे किः अमूर्तकरण, परिमाणीकरण, सादृश्यता, समस्या–विश्लेषण, जटिल को सरल परिस्थियों में रूपान्तरित करना, यहाँ तक कि अनुमान लगाने और उनकी पुष्टि करने के अभ्यास – ये सभी समस्या–समाधान के अनेक प्रसंगों में उपयोगी होते हैं। इसके अलावा जब बच्चे धीरे–धीरे समाधान खोजने के विविध मार्गों से परिचित होते हैं तो उनके औजारों की पेटी और समृद्ध हो जाती है। वे यह भी सीखते हैं कि कब कौन–सा मार्ग सबसे अच्छा होता है। बच्चों को रूढ़ि की तरह गणित को 'एकदम सही विज्ञान' मानने के बजाय स्वानुभव से सीखे गए तरीकों या मोटे नियमों के उपयोग से भी परिचित होने की जरूरत होती है। परिमाणों का अनुमान लगाना और नजदीकी मोटे उत्तर पर पहुँचना भी एक बेहद जरूरी हुनर है।

किसी बात को मन में देख पाना और निरूपित कर पाना ऐसा कौशल है जिसे विकसित करने में गणित सहायक हो सकता है। परिमाणों, आकारों और आकृतियों का इस्तेमाल करके परिस्थितियों के प्रतिरूप गढ़ना गणित का सर्वश्रेष्ठ उपयोग है। गणित की अवधारणाएँ कई तरीकों से निरूपित की जा सकती हैं और ऐसे निरूपण अलग–अलग प्रसंगों में अनेक प्रकार के प्रयोजनों में काम आ सकते हैं। उदाहरण के लिए, किसी फलन को बीजगणितीय रूप में या रेखाचित्र के रूप में निरूपित किया जा सकता है। 'p/q' का निरूपण किसी पूरी चीज का अंश दर्शाने के लिए उपयोग किया जा सकता है, लेकिन यह दो संख्याओं 'p' तथा 'q' का भागफल भी दर्शा सकता है। भिन्नों के बारे में यह सीखना उतना ही महत्वपूर्ण है जितना भिन्नों का अंकगणित सीखना। गणित तथा अध्ययन के अन्य विषयों के बीच सम्बन्ध बनाने की भी जरूरत है। जब बच्चे रेखाचित्र बनाना सीखते हैं तब उन्हें विज्ञान की विभिन्न शाखाओं में, जिसमें भूगर्भ विज्ञान भी शामिल है, क्रियात्मक सम्बन्धों के बारे में सोचने के लिए भी प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। बच्चों को इस तथ्य का अहसास कराना जरूरी है कि विज्ञान के अध्ययन में गणित एक प्रभावशाली उपकरण है।

गणित में सुव्यवस्थित तर्कप्रक्रिया के महत्व पर जितना भी जोर दिया जाए वह कम होगा। गणित सौन्दर्य और शोभा की धारणाओं, जो गणितज्ञों को अतिशय प्रिय हैं, से भी अंतरंग रूप से जुड़ा है। किसी बात को सिद्ध करना महत्वपूर्ण है, परन्तु निगमनात्मक उपपत्ति (प्रूफ़) के साथ–साथ विद्यार्थियों को चित्रों और रचनाओं से मिलने वाले प्रमाणों को भी सीखना चाहिए। प्रामाणिक पुष्टि ऐसी प्रक्रिया है जो शंकित विरोधी को आश्वस्त कर देती है। स्कूली गणित में उपपत्ति को तर्क करने के व्यवस्थित तरीके की तरह सीखने को प्रोत्साहन दिया जाना चाहिए।

एनसीएफ गणितीय सम्प्रेषण की भी बात करता है – कि यह एकदम सही होता है और भाषा का सुस्पष्ट ढंग से उपयोग करता है और इसके निरूपण में दृढ़ता होती है। ये सभी गणितीय कार्यपद्धति की महत्वपूर्ण विशेषताएँ हैं। गणित में विशेष शब्दावली का उपयोग जान–समझकर अपनी खास शैली में किया जाता है। गणितज्ञ उपयुक्त संकेत चिन्हों पर बहस करते हैं क्योंकि अच्छे संकेत चिन्हों की गणित में बड़ी प्रतिष्ठा है और माना जाता है कि ये विचार प्रक्रिया में सहायक होते हैं। जैसे–जैसे बच्चे बड़े होते हैं उन्हें ऐसी परम्पराओं के महत्व और उपयोग की कद्र करना सिखाया जाना चाहिए। इसका अर्थ यह होगा कि समीकरणों को गठित करना सिखाने पर भी उतना ही ध्यान और समय दिया जाना चाहिए जितना उन्हें हल करने पर दिया जाता है।

पाठ्यचर्या का गठन

स्कूली शिक्षा के विभिन्न चरणों के लिए एनसीएफ की निम्न अनुशंसाएँ हैं:

1. 'पूर्व–प्राथमिक': पूर्व–प्राथमिक स्तर पर सीखना खेल के माध्यम से होता है, न कि शिक्षणात्मक सम्बोधनों से।

संख्याओं की श्रृंखलाओं को रटकर सीखने की बजाय बच्चों को छोटे–छोटे समुच्चयों के सन्दर्भ में शब्द–खेलों और गिनती तथा गिनती और मात्रा के परस्पर सम्बन्धों को समझने और सीखने की जरूरत होती है। एक–एक आयाम में बारी–बारी से सरल तुलनाएँ और वर्गीकरण करना, आकारों और समरूपताओं को पहचानना, ये सब इस स्तर पर हासिल किए जाने वाले उपयुक्त कौशल हैं। यह भी अत्यन्त महत्वपूर्ण है कि दूसरों के द्वारा पहले से तय किए गए अभिव्यक्ति के तरीकों के बजाय बच्चों को भाषा का उपयोग करके मुक्त भाव से अपने विचार और भावनाएँ व्यक्त करने के लिए प्रोत्साहित किया जाए।

2. 'प्राथमिक': प्राथमिक स्तर पर बच्चों के मन में गणित के प्रति सकारात्मक रुझान और लगाव पैदा करवाना उतना ही महत्वपूर्ण है जितना कि संज्ञानात्मक कौशलों और अवधारणाओं का विकास है। गणितीय खेल, पहेलियाँ और कहानियाँ, गणित के प्रति सकारात्मक रुझान विकसित करने में और गणित तथा रोजमर्रा की सोच के बीच सम्बन्ध बनाने में मदद करते हैं। इस दौर में, संख्याओं तथा उनकी पारस्परिक क्रियाओं के अलावा आकारों, स्थानिक समझ, नियमित संरचनाओं, मापन और आँकड़ों के उपयोग को भी समुचित महत्व दिया जाना चाहिए। अवधारणाएँ ग्रहण करने में विद्यार्थी जिस तरह मूर्त से अमूर्त की ओर क्रमशः प्रगति करते हैं, उसका पाठ्यचर्या में स्पष्ट रूप से समावेश किया जाना चाहिए। अभिकलन कौशलों के अलावा संरचनाओं को पहचानने, व्यक्त करने और उनकी व्याख्या करने पर, सवाल हल करने में अनुमान लगाने और सन्निकटन पर, अन्तर्सम्बन्ध बनाने पर, तथा संवाद और तर्क करने में भाषा कौशलों के विकास पर भी जोर दिया जाना जरूरी है।

3. 'उच्च–प्राथमिक': यहाँ विद्यार्थियों को उन शक्तिशाली अमूर्त अवधारणाओं को उपयोग करने का पहला स्वाद मिलता है जो पहले सीखे गए ज्ञान और अनुभव का निचोड़ होती हैं। यह उन्हें प्राथमिक स्तर पर सीखी गई बुनियादी अवधारणाओं और कौशलों को माँजने तथा सुदृढ़ करने में सक्षम बनाता है, जो सार्वभौमिक गणितीय साक्षरता हासिल करने की दृष्टि से अत्यावश्यक है। यहाँ विद्यार्थियों का बीजगणितीय संकेतलिपि से, और सवाल हल करने में तथा व्यापकीकरण करने में उसके उपयोग से, परिचय होता है, साथ ही स्थान–विस्तार (स्पेस) और आकारों का व्यवस्थित अध्ययन करने और अपने मापन ज्ञान को मजबूत बनाने का भी मौका मिलता है। आँकड़ों को सम्हालना, उनका निरूपण और व्याख्या करना, सभी प्रकार की जानकारी से काम लेने की क्षमता का महत्वपूर्ण अंग होते हैं। यह क्षमता एक नितान्त आवश्यक 'जीवनकौशल' है। इस स्तर की पढ़ाई विद्यार्थियों की स्थानिक बुद्धि और मानसिक संदर्शन कौशलों को समृद्ध बनाने का भी अवसर देती है।

4. 'माध्यमिक': अब विद्यार्थियों को एक अध्ययन क्षेत्र की तरह गणित का ढाँचा दिखाई देने लगता है। वे गणितीय संवाद की विशेषताओं से परिचित हो जाते हैं: सावधानीपूर्वक परिभाषित की गई शब्दावली और अवधारणाएँ, उन्हें निरूपित करने के लिए संकेत चिन्हों का उपयोग, सुस्पष्ट रूप से व्यक्त प्रस्थापनाएँ और उनकी पुष्टि करने वाली उपपत्तियाँ। ये पहलू रेखागणित के क्षेत्र में विशेष रूप से विकसित किए जाते हैं। विद्यार्थी बीजगणित में भी सहज प्रवीणता हासिल करते हैं, और यह क्षमता केवल गणित के व्यापक उपयोगों की दृष्टि से ही नहीं, बल्कि स्वयं गणित के भीतर प्रतिपादनों को न्यायसंगत ठहराने और सिद्ध करने की दृष्टि से भी महत्वपूर्ण है। विद्यार्थी पहले जो अनेक अवधारणाएँ और कौशल सीख चुके होते हैं, इस स्तर पर आकर वे उन्हें समेकित और समाहित करके समस्याओं को हल करने की दक्षता हासिल करते हैं। इस स्तर पर पढ़ाए जाने वाले गणितीय प्रतिरूपण, आँकड़ों का विश्लेषण और उनकी व्याख्या उच्च स्तर की गणितीय साक्षरता को मजबूत बना सकते हैं। व्यक्तिगत और सामूहिक रूप से अन्तर्सम्बन्धों और संरचनाओं का अन्वेषण करना, मानसिक संदर्शन और व्यापकीकरण, तथा अटकलें लगाना और उनको सिद्ध करना भी इस स्तर पर महत्वपूर्ण होते हैं। इन प्रक्रियाओं को उपयुक्त औजारों के इस्तेमाल के द्वारा, जिसमें गणित की प्रयोगशालाओं में मिलने वाले स्थूल प्रतिरूप और कम्प्यूटर शामिल हैं, प्रोत्साहित किया जा सकता है।

5. 'उच्चतर–माध्यमिक': इस स्तर पर गणित के पाठ्यक्रम का उद्देश्य विद्यार्थियों को गणित के अनेक प्रकार के उपयोगों की समझ और ऐसे उपयोगों को सम्भव बनाने वाले बुनियादी औजार प्रदान करना है। इस स्तर पर ही गणित की गहराई और विस्तार की अक्सर विरोधाभासी माँगों के बीच सावधानीपूर्वक चुनाव करने की भी जरूरत होती है।

मूल्यांकन के बारे में एन.सी.एफ. की अनुशंसा है कि बोर्ड परीक्षाओं का पुनर्गठन किया जाना चाहिए ताकि किसी राजकीय प्रमाणपत्र के लिए न्यूनतम पात्रता केवल संख्या ज्ञान को माना जाए जिससे कि गणित में असफल होना कम हो जाए। उच्च स्तर पर अधिक चुनौतीपूर्ण परीक्षाओं, जिनमें अवधारणात्मक ज्ञान और योग्यता को परखा जाए, की अनुशंसा की गई है।

एन.सी.एफ. की गणित की उत्कृष्ट शिक्षा की कल्पना इन जुड़वाँ मान्यताओं पर आधारित है कि सभी विद्यार्थी गणित सीख सकते हैं तथा सभी विद्यार्थियों को गणित सीखने की जरूरत है। अतएव यह आवश्यक हो जाता है कि सभी बच्चों को उच्च गुणवत्ता की गणित शिक्षा प्रदान की जाए।

इन्दु प्रसाद *अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन, बंगलौर में एकेडमिक्स एवं पैडागॉजी समूह की प्रमुख हैं। इसके पहले उन्होंने तमिलनाडु और कर्नाटक के विशेष/सर्वसुलभ स्कूलों में 15 वर्ष से भी अधिक समय तक अध्यापिका की तरह विभिन्न प्रकार की तंत्रिका चुनौतियों से जूझ रहे बच्चों के साथ काम किया है। उनसे* indu@azimpremjifoundation.org *पर सम्पर्क किया जा सकता है ।*

सवाल पूछना

1. यदि आप जानते हैं कि 235 + 367 = 602, तो 234 + 369 कितना होगा? आपने उत्तर कैसे निकाला?
2. संख्या 5384 में कोई एक अंक बदल दीजिए। क्या संख्या बढ़ी या घटी? कितनी?

स्रोतः एन.सी.एफ. 2005

7 प्राथमिक स्कूली गणित की महत्वपूर्ण अवधारणाएँ

कमला मुकुन्दा



मनोवैज्ञानिकों द्वारा अब तक शुरुआती गणितीय क्षमताओं तथा अध्ययन के बारे में किए गए विविध शोधों में से, मैंने इस लेख के लिए दो आम विषयों को चुना हैः मानसिक संख्या रेखा का बुनियादी महत्व और प्राथमिक स्कूल में अवधारणात्मक व प्रक्रियात्मक अध्ययन के बीच सम्बन्ध (अक्सर तो सम्बन्ध की कमी)। मैं मानती हूँ, कि दोनों ही विषय उन लोगों के लिए खास रुचि के हैं जो 6 से लेकर 11 साल के आसपास तक की उम्र के बच्चों के साथ काम कर रहे हैं। वे एक तरह से उनमें आने वाले सालों के लिए अंकगणित व गणित की बुनियाद रख रहे हैं।

मानसिक संख्या रेखा

संज्ञानात्मक वैज्ञानिकों ने काफी निर्णायक रूप से पिछले कुछ दशकों में यह स्थापित कर दिया है कि मनुष्य होने के नाते हम चीजों को 'गिनने के लिए पैदा हुए हैं'। स्कूल–पूर्व उम्र वाले बच्चों के साथ किया गया कुछ सरल लेकिन शानदार काम यह दर्शाता है कि बच्चे 4–5 वर्ष की उम्र से पहले ही स्वाभाविक रूप से बुनियादी व महत्वपूर्ण संख्यात्मक कौशल विकसित कर लेते हैं और उनका अभ्यास करते हैं। इन कौशलों के विकास का ढंग बच्चों द्वारा भाषा सीखने के तरीके जैसा ही है। ऐसा प्रतीत होता है कि हमारे दिमागों में एक अन्तर्जात मॉड्यूल (कोष्ठ) है जो कि 'न्यूनतम' पर्यावरणीय सहयोग से हरकत में आ जाता है। प्रारम्भिक वर्षों की एक बेहद महत्वपूर्ण उपलब्धि होती हैः गिनने के कार्य में उपयोग की जानेवाली एक मानसिक संख्या रेखा (एमएनएल) की ठीक समझ और उसका उपयोग करने की क्षमता विकसित करना। यह कोई मामूली बात नहीं! जब कोई स्कूल–पूर्व उम्र का बच्चा चीजों के किसी समूह की गिनती करता है तो वह पाँच अत्यन्त महत्वपूर्ण सिद्धान्तों का उपयोग करता है–

1. प्रत्येक वस्तु और उसके संख्यानाम के बीच 'एक से एक का' सम्बन्ध होना चाहिए। उदाहरण के लिए, आप संख्या नाम 'चार' को एक से ज्यादा वस्तुओं को नहीं दे सकते।
2. लेकिन संख्याओं के नामों पर किसी भी तरह से किन्हीं खास वस्तुओं का अधिकार नहीं हो जाता; उन्हें फिर किसी दूसरी वस्तु को दिया जा सकता है। चीजों की पुनर्गणना करते वक्त, आप सारे सम्बन्धों को बदल सकते हैं।
3. संख्यानामों को एक निश्चित, अपरिवर्तनीय क्रम में कहना होता है। असल में, कई बच्चे संख्याओं को गलत क्रम में बोलते हैं एक, दो, तीन, पाँच, सात, आठ, नौ, दस! पर वे अपरिवर्तनीय ढंग से हमेशा ऐसा ही बोलते रहते हैं (जाहिर है तभी तक, जब तक वे अपने को सही नहीं कर लेते)।
4. बोली गई आखिरी संख्या हमेशा समूह का संख्या – आकार दर्शाती है।
5. गणना ऐसी प्रक्रिया है जो आप पिन से लेकर लोगों तक, वस्तुओं के किसी भी समूह के साथ कर सकते हैं।

समय के साथ, वे इस एमएनएल का उपयोग दो संख्याओं की तुलना करते वक्त यह बताने के लिए करते हैं कि उनमें कौन–सी बड़ी है, और जल्दी ही 'आगे गिनते जाने' के तरीके का इस्तेमाल करके सरल जोड़ करने लगते हैं। यानी, 4 और 2 को जोड़ने के लिए वे एमएनएल पर बड़ी संख्या 4 के साथ शुरु करते हैं और फिर दाईं ओर दो इकाइयाँ आगे बढ़कर 6 पर पहुँच जाते हैं। पाँच वर्षीय बच्चों को एमएनएल पर गिनती करने के साथ तुलना करने के अपने कौशलों को मिलाना सीखते वक्त सहज रूप से इस परिष्कृत ढंग को ईजाद करते देखा गया है।

जब बच्चे औपचारिक स्कूली पढ़ाई शुरु करते हैं, तो कुछ भी नया सीखने के लिए सामान्यतः उनके पास यह अनौपचारिक संख्या ज्ञान होना चाहिए। पर स्कूल शुरु करते वक्त सभी बच्चों की स्थिति एक–सी नहीं होती। अध्ययन दिखाते हैं (और जैसा किसी भी शिक्षक का अनुभव भी बताता है) कि पहली कक्षा में बच्चों के संख्या ज्ञान का स्तर अलग–अलग होता है। कुछ विद्यार्थी कई संख्या तथ्यों के ज्ञाता हो जाते हैं, जिसका अर्थ है कि वे स्मृति में बैठ गए तथ्यों, जैसे '4 + 2 = 6', को झट से स्मरण करके सवाल हल कर सकते हैं, और उन्हें फिर से उन संख्याओं को जोड़ना नहीं पड़ता। यह भी सम्भावना रहती है कि नए सवालों के आने पर ऐसे बच्चे आगे गिनते जाने जैसी विधियों का प्रयोग ज्यादा प्रभावशाली ढंग से कर सकते हैं। अन्य छात्र घाटे में रहते हैं क्योंकि उनके पास एमएनएल पर गिनती करने का पर्याप्त अभ्यास नहीं होता, और इसलिए उन्होंने सवाल हल करने की विधियाँ ईजाद नहीं की होतीं, जिसके चलते उनके पास पर्याप्त संख्या तथ्य नहीं होते।

बच्चों के बीच के इन अन्तरों को समझाने के लिए कई कारण बताए गए हैं । पर मनोवैज्ञानिक इस अन्तर को कम से कम समय में दूर करने के तरीकों पर काम कर रहे हैं, ताकि कमजोर बच्चों को भी गणित के लिए जरूरी उनकी बुनियाद निर्मित करने में मदद की जा सके। सबसे जाहिर सुझाव है कि एमएनएल की अवधारणा और उसके गुणों की सरल और स्पष्ट व्याख्या को पहली कक्षा के पाठ्यक्रम में शामिल किया जाना चाहिए, क्योंकि

सामान्यतः इसे इस तरीके से नहीं पढ़ाया जाता। दिलचस्प बात है कि संख्यात्मक क्षमता के इन शुरुआती अन्तरों की सबसे मजबूत सम्बन्धित कड़ियों में से एक होती है स्कूल में दाखिल होनेवाले बच्चे का सामाजिक–आर्थिक दर्जा (एसईएस)। संख्या ज्ञान के मामले में मध्यम या ऊँचे एसईएस वाले बच्चों की तुलना में निचले एसईएस वाले बच्चे काफी पिछड़े रहते हैं। ध्यान न दिए जाने पर, यह अन्तर समय के साथ और बढ़ता जाता है। विकासवादी मनोवैज्ञानिक रॉबर्ट सीगलर और गीता रमानी इस अन्तर के लिए जिम्मेदार एक रोचक कारण को सामने लाते हैं: निचली एसईएस वाले बच्चों को गत्ते वाले ऐसे खेल खेलने को नहीं मिलते जो दूसरे बच्चे अक्सर खेला करते हैं। गत्ते के कई सरल खेलों (जैसे साँप–सीढ़ी या लूडो) का मुख्य अवयव रैखिक क्रम में व्यवस्थित, संख्यावाले खाने होते हैं। आप हर चाल के लिए प्राप्त संख्या के हिसाब से अपनी गोटी को, एक–एक खाना गिनते हुए, कुछ निश्चित खाने आगे बढ़ाते हैं। इन लोगों का कहना है कि ऐसे खेल खेलने से स्कूल–पूर्व उम्र के बच्चों को एमएनएल की सही समझ विकसित करने के लिए सही उद्दीपन मिलता है।

एक हालिया शोध में, सीगलर और रमानी ने अमरीका में निचले और मध्यम स्तर के एसईएस पृष्ठभूमियों वाले ढेर सारे बच्चों के साथ काम किया। पहले तो उन्होंने नीचे दिए गए इस सरल कार्य के द्वारा इस सामान्य जानकारी की पुनः पुष्टि की कि निचले एसईएस वाले बच्चे संख्यात्मक परिमाण के आकलन में काफी बुरा प्रदर्शन करते हैं: एक रेखा दी गई है जिसके एक सिरे पर 0 और दूसरे सिरे पर 100 है, अब एक तीसरी संख्या (मान लीजिये 37) को इस रेखा पर सही जगह रखिए। इसके बाद उन्होंने निचले एसईएस वाले बच्चों को रैखिक तौर पर व्यवस्थित सिर्फ दस खानों वाले एक बेहद बुनियादी गत्ते के खेल को करीब 30 बार थोड़े–थोड़े समय के लिए खिलवाया। इस प्रयास में लगा कुल समय सिर्फ करीब दो घण्टे था, लेकिन इसके उपरान्त फिर किए गए परीक्षणों से प्रगट हुआ कि ये छात्र तेज छात्रों के करीब–करीब 'समकक्ष' आ गए। निश्चित ही, इस अध्ययन को भारत में फिर से दोहराए जाने की जरूरत है। पर शुरुआती अंकगणित के लिए एमएनएल के महत्व, और इस प्रयास की सरलता को देखते हुए इसकी पड़ताल करना अवश्य ही उपयोगी होगा।

अवधारणाओं को कार्यविधियों के साथ जोड़ना

संख्याविधियों और अवधारणात्मक समझ के बीच की खाई काफी चौड़ी है। संख्या विधियों का एक उदाहरण है गुणन का लम्बा तरीका, जहाँ हमें सिखाया जाता है दाईं तरफ से शुरू करना, और बाईं तरफ बढ़ते हुए कार्य करना, गुणनफलों को एक के बाद एक, बाईं तरफ एक स्थान खिसकाते हुए लिखते जाना और अन्त में सबको जोड़ देना..। प्राथमिक स्कूली गणित, नियमों की ऐसी ही प्रणालियों से भरी पड़ी है। पर छात्र आपको यह नहीं बता पाते (क्योंकि उन्हें पता ही नहीं होता) कि ये प्रणालियाँ क्यों काम कर जाती हैं। दिलचस्प बात है कि ऐसा लगता है जैसे एक अवधारणा पढ़ाना (ठोस वस्तुओं इत्यादि का इस्तेमाल करके), फिर सवाल हल करने की एक कार्यविधि से परिचय करवाना, फिर उसका ढेर सारा अभ्यास करवाना – और विधि समझा देने के बाद उस मूल अवधारणा को बिरले ही याद करना – यह सब काफी नहीं होता। ऐसा मालूम पड़ता है कि शिक्षकगण बच्चों को किसी भी कार्यविधि का सम्बन्ध ठोस अवधारणा के साथ स्पष्ट रूप से जोड़कर दिखाने में अपेक्षाकृत कम समय व ऊर्जा लगाते हैं, हालाँकि ऐसा करने से ही बच्चों को यह समझ आ सकता है कि यह विधि यहाँ क्यों काम कर जाती है। हम क्यों ''दाईं तरफ से शुरू करते हैं, बाईं ओर को काम करते हैं, एक के बाद एक गुणनफलों को बाईं तरफ एक स्थान खिसकाकर लिखते जाते हैं, और फिर सबको जोड़ देते हैं'' इसकी जटिलता को देखते हुए इस सम्बन्ध को एक बार, या दो बार भी समझा देना काफी नहीं प्रतीत होता।

> *''हम क्यों दाईं तरफ से शुरू करते हैं, बाईं ओर को काम करते हैं, एक के बाद एक गुणनफलों को बाईं तरफ एक स्थान खिसकाकर लिखते जाते हैं, और फिर सबको जोड़ देते हैं''?*

अब आप सोच में पड़ सकते हैं कि यह सम्बन्ध इतना महत्वपूर्ण क्यों है। खोजने पर यह पता चलता है कि गणितीय अवधारणाओं को कार्यविधियों के साथ बहुत ही स्पष्ट रूप से जोड़ने के पक्ष में मजबूत तर्क हैं। एक तो यह कि इस प्रक्रिया में अवधारणात्मक समझ भी अपने आप मजबूत हो जाएगी। वस्तुतः प्रक्रियात्मक व अवधारणात्मक शिक्षा के बीच आगे–पीछे जोड़ने वाली प्रक्रिया निरन्तर चलती रहनी चाहिए। किसी प्रक्रिया के उपयोग पर विचार करना, पूछना कि क्या कुछ खास प्रक्रियाएँ काम करती हैं और क्या कुछ दूसरी गलत हैं, और ऐसा क्यों है, यह सब अवधारणा की हमारी समझ को और मजबूत बनाता है। ऐसा करने का एक और अच्छा कारण यह है कि परिकल्पना और प्रक्रिया का अन्तर्सम्बन्धित होना इसलिए भी जरूरी है ताकि वह प्रक्रिया नए

सवालों में लचीले ढंग से अपनाई जा सके। और तीसरा कारण यह है कि सवाल हल करने की किसी अंकगणितीय विधि में होने वाली गलतियों को ऐसी ही समझ के द्वारा सुधारा जा सकता है, बजाय बार–बार यह याद दिलाने के कि ''इसे कैसे किया जाना चाहिए।''

मनोवैज्ञानिक लॉरेन रैसनिक ने 1982 में दूसरी और तीसरी कक्षा में पढ़ रहे चार विद्यार्थियों का गहराई से बहुत सुन्दर अध्ययन किया, और निर्णायक रूप से यह दर्शाया कि उन बच्चों के संख्या ज्ञान और उनके अवधारणात्मक कौशलों के बीच कोई सह सम्बन्ध नहीं था। बच्चों के दिमागों में ज्ञान के ये दो समूह बहुत साफ–सुथरे ढंग से एक दूसरे से अलग–थलग थे। महत्वपूर्ण बात यह थी कि उन्होंने पाया कि विद्यार्थी इन दोनों के बीच सम्बन्धों को स्वाभाविक ढंग से पहचान नहीं पा रहे थे। इसके बाद उन्होंने कई अंकों वाली संख्याओं का घटाना सिखाने के लिए खण्डों और संख्या संकेतों का साथ–साथ उपयोग करने वाले एक 'मानचित्रण शिक्षण' तरीके को विकसित किया। खण्ड 100, 10 और 1 आकार के थे, और प्रत्येक चरण पर खण्डों की एक खास व्यवस्था प्रस्तुत की जाती थी और साथ में विधि का सम्बन्धित चरण भी होता था। लिखित संगणना में खण्ड व्यवस्था का एक ब्यौरा था, और खण्ड व्यवस्थाएँ लिखित संगणना की पुष्टि करती थीं। उनकी इस अध्यापन विधि की कुल अवधि मात्र 40 मिनिट थी। इस लघु और सरल प्रयास के फलस्वरूप बच्चों में विधियों का सही उपयोग करने में और साथ ही शब्दों में यह समझा पाने में कि चीजें किसी खास ढंग से ही क्यों काम करती हैं, बहुत ज्यादा सुधार हो गया। यहाँ हम फिर से देखते हैं कि हमारे शिक्षण में, खासतौर पर प्राथमिक स्कूली परिस्थितियों में, अपेक्षाकृत छोटी पर अच्छे से तैयार की गई प्रायोगिक सामग्री जोड़ देने का बहुत गहरा असर हो सकता है।

लेख में आए सन्दर्भः

1. Lauren B. Resnick, 1982. Syntax and Semantics in Learning to Subtract. In T. P. Carpenter, J. M. Moser and T. A. Romberg, eds.,
2. Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective. Erlbaum.
3. Geetha B. Ramani and Robert S. Siegler, 2008. Board Games and Numerical Development, Child Development, Vol. 79 (2).
4. Siegler has a website that provides almost all his publications for free download:
   http://www.psy.cmu.edu/~siegler/publications-all.html

कमला मुकुन्दा *ने शैक्षणिक मनोविज्ञान का अध्ययन किया और फिर 1995 में सेन्टर फॉर लर्निंग से जुड़ गईं, जहाँ वे उत्साही साथियों के समूह के साथ कार्य करती हैं। वे गणित, सांख्यिकी, मनोविज्ञान, पढ़ाती हैं और माध्यमिक स्कूल के बच्चों को पढ़ाकर बहुत ऊर्जा अनुभव करती हैं। वे बाल विकास और शिक्षा पर केन्द्रित किताब ''व्हॉट डिड यू आस्क ऐट स्कूल टुडे?'' की लेखिका हैं। उनसे* kamla.mukunda@gmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

8 माँ का गणित और आकलन की कला

नट रामचन्द्रन



इस लेख पर एक सरसरी निगाह डालें और इसमें मौजूद शब्दों की संख्या का जल्दी से अनुमान लगाएँ।

गणित एक सुनिश्चित विज्ञान है क्योंकि इसके अन्तर्निहित तत्व, अर्थात संख्याएँ और प्रक्रियाएँ, सुनिश्चित होती हैं। गणित की (बोली या लिखी गई) भाषा के साथ तुलना करें जिसकी अलग–अलग व्याख्या किए जाने का अन्देशा रहता है– उदाहरण के लिए किसी अखबार का एक ही लेख पढ़ कर दो लोग अलग–अलग निष्कर्षों पर पहुँच सकते हैं – पर गणित अपने आप में ही, सुनिश्चित और तार्किक दृष्टि से स्वतःपूर्ण है। दूसरे शब्दों में, कहीं भी और सभी जगह, संख्या दो हमेशा संख्या सात से छोटी होगी। किसी जोड़ने वाली क्रिया का हमेशा एक सुनिश्चित उत्तर होता है। पर ''आसमानी नीला'' शब्दों से कई बहुरंगी व्याख्याएँ निकल सकती हैं। जॉन डन की काव्यात्मक उक्ति ''और इसलिए कभी किसी को यह देखने मत भेजो कि (मृत्युसूचक) घण्टा किसके लिए बजता है, वह तुम्हारे लिए ही बजता है'' कई अलग–अलग अनुभूतियाँ जगा सकती है।

अपने प्रभामण्डल के बावजूद गूढ़ अमूर्त गणित वास्तविक दुनिया में एक अपवाद है। हमारी नित्यप्रति की जिन्दगियों के प्रवाह में होनेवाली घटनाएँ वैसे परिपूर्ण जानकारी वाले सैद्धान्तिक प्रश्न–वक्तव्यों के रूप में सामने नहीं आतीं जैसे कि हम गणित की परीक्षाओं में देखते हैं। गणित की व्यावहारिक उपयोगिता गणित के विज्ञान को आकलन की कला के साथ मिश्रित करने में होती है। आकलन – ऐसी चीज के बारे में एक सोचा–समझा अनुमान लगाना जिसके बारे में व्यक्ति को पता न हो – स्वाभाविक रूप से एक अनिश्चितता भरी क्रिया है और इसलिए इसके गलत होने की आशंका भी रहती है। लेकिन सुनिश्चित विज्ञान को एक अनिश्चित कला के साथ मिलाने से गणित की ताकत और मूल्य बढ़ जाता है।

जब मेरी माँ खाना बनाती थी वह सभी व्यंजनों में सही मात्रा में नमक डालती थी। मैं अक्सर यह सोचता था कि वह यह कैसे करती है, जबकि उसे अलग–अलग मात्रा में खाना बनाना पड़ता है। कई बार वह किसी नए व्यंजन को बनाने के लिए ऐसी पाकविधि का प्रयोग करती थी जिसमें यह सामान्य सुझाव दिया रहता था – नमक स्वादानुसार मिलाएँ। अब समझ में आता है कि यह कौशल उसे उसके सहज ज्ञान और खाना बनाने में लम्बे अनुभव से मिला था। इस अनुभव ने उसे नमक की मात्रा का ठीक आकलन करना और उसे सही मात्रा में नापतौल कर मिलाने की यह निपुणता दी थी (और हाँ, ज़ाहिर है कि इसमें हर बार सही होने के लिए थोड़ा सौभाग्य भी शामिल होता था।) उन मामलों में जहाँ जानकारी कम या मालूम नहीं होती या सूचना इकट्ठा करने के लिए किए जाने वाले प्रयास की तुलना में उससे मिलने वाले लाभ कम होते हैं, माताएँ और अन्य सभी गणितीय अटकलबाजी करते हैं और 'अँगूठे के नियम' प्रतिपादित करते हैं।

> *'' मेरी माँ खाना बनाती थी वह सभी व्यंजनों में सही मात्रा में नमक डालती थी। मैं अक्सर यह सोचता था कि वह यह कैसे करती है, जबकि उसे अलग–अलग मात्रा में खाना बनाना पड़ता है। कई बार वह किसी नए व्यंजन को बनाने के लिए ऐसी पाकविधि का प्रयोग करती थी जिसमें यह सामान्य सुझाव दिया रहता था – नमक स्वादानुसार प्रयोग करें।''*

जोनाथन स्विफ्ट इसे 'गुलीवर की यात्राएँ' उपन्यास में बड़े सुन्दर ढंग से विस्तारपूर्वक प्रस्तुत करते हैं कि कैसे लिलिपुट द्वीप के छोटे लोगों ने (जो गुलीवर के आकार के 1/12 वें भाग के बराबर थे) गुलीवर के लिए एक कमीज सिली:

> ''फिर उन्होंने मेरा दाँया अँगूठा नापा, और फिर इसके आगे कुछ नहीं नापा; क्योंकि गणितीय गणना के द्वारा अँगूठे के दो चक्कर, कलाई के एक चक्कर के बराबर थे, और इसी तरह उन्होंने गले व कमर की नापों का भी अनुमान लगा लिया और मेरी पिछली कमीज की मदद से, जो मैंने उन्हें बानगी के तौर पर दिखाई थी, उन्होंने मुझे एकदम दुरुस्त कमीज बनाकर दे दी।''

ऐसा समझ में आता है कि स्विफ्ट के लिलिपुटवासियों के पास आकलन व सिलाई का अच्छा कौशल था।

एक बल्लेबाज की कला व गणित के विज्ञान को मिलाने की क्षमताओं के बारे में सोचें। यह जानने के लिए कि गेंद उस तक कब पहुँचेगी उसे गेंद की रफ्तार का अनुमान लगाना होता है; गेंद की गति की वक्रता का अनुमान लगाना होता है कि वह कहाँ और कैसी आएगी। उदाहरण के लिए – वाइड (पहुँच से बाहर), फुलटॉस (बिना टप्पे के), इनस्विंग (अन्दर को घूमती हुई) आदि। और इस बात का आकलन भी कि वह एकदम सही कोण पर गेंद पर कितनी जोर से प्रहार करे कि गेंद सीमारेखा के पार चली जाए। इन आकलनों में से किसी एक में हल्की–सी चूक का

मतलब है रन बनाने से चूकना या फिर स्टंप्स का बिखर जाना। किसी भी अच्छे बल्लेबाज के लिए इन सभी बातों का पल भर के अन्दर सही अनुमान लगाना जरूरी होता है। सचिन तेंदुलकर उनकी ओर फेंकी हुई गेंदों के बारे में बहुत सही अन्दाजा लगाते हैं और उनकी यही काबिलियत उन्हें बेहतरीन बल्लेबाज बनाती है।

आज की भारतीय स्कूली व्यवस्था, गणित के कलात्मक और उपयोगी पक्षों की उपेक्षा करते हुए, गूढ़ गणित पर अनावश्यक जोर देती है। गणित को एक ऐसे औजार की तरह पढ़ाया जाना चाहिए जो कि वास्तविक जीवन में कुशलतापूर्वक काम में लाया जा सके। गणित को एक औजार बनाने के लिए आकलन और गणना की दृष्टि से उसकी उपयोगिता के बारे में स्कूलों में सिखाया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, बच्चों को एक आयत के क्षेत्रफल की गूढ़ धारणा पढ़ाए जाने के साथ–साथ, कक्षाकक्ष के क्षेत्रफल का आकलन करने के लिए समझदारी भरे अनुमान लगाने को कहा जाना चाहिए।

समकोणों और कर्णों से जुड़ी रेखागणित की अमूर्त धारणाएँ, या सरल दूरी को नापने की इकाइयाँ, जैसे मीटर, सेंटीमीटर और किलोमीटर पढ़ाते वक्त बच्चों से अपने आसपास की मिलती–जुलती कोणीय स्थिति वाली दूरियों का अनुमान लगाने को कहें। गति, वेग और दूरी के बारे में पढ़ाते वक्त बच्चों को मामूली जानकारी के साथ काल्पनिक प्रश्न दिए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, अपने पड़ोस के कस्बे को जानेवाली बस पकड़ने के लिए स्कूल से बस स्टैंड पहुँचने के लिए कितना तेज चलना चाहिए? ऐसे सजीव अभ्यासों से वे अमूर्त धारणाओं का उपयोग करने, त्वरित गणना करने के कौशल को सुधारने तथा अपने आकलन कौशल को माँजने में समर्थ हो जाएँगे।

वाणिज्यिक व्यवसाय अनिश्चितता और अधूरी जानकारियों से भरे होते हैं। अतः उन्हें लगातार इस बाबत अनुमान लगाना पड़ते हैं कि वे भविष्य में कितने उत्पाद बेच सकते हैं; भविष्य में किन सम्भावित कीमतों पर इन्हें बेचा जा सकेगा; उनका सम्भावित लाभांश क्या होगा। किसी भी व्यवसाय में, वर्तमान स्थिति में अपनी पूंजी लगाने (या न लगाने) के लिए भविष्य के बारे में ऐसे आकलन करना बहुत महत्वपूर्ण होता है। इसी तरह के लघु परिमाण वाले अभ्यास बच्चों को उस समय करने के लिए दिए जा सकते हैं जब उन्हें धन, लाभांशों, मूल्य बढ़ाने, विक्रय मूल्य आदि के सिद्धान्तों के बारे में पढ़ाया जा रहा हो। ऐसे अभ्यासों से गणितीय सिद्धान्त आसानी से बोधगम्य बन जाते हैं, अमूर्त अवधारणाओं की उपयोगिता का एहसास होता है और साथ ही इससे छोटे बच्चों को जल्दी से सोचने और गणना कर पाने के लिए एक आधार मिलता है।

> *''भारत की आबादी अपने सुबह के नाश्ते पर कितना पैसा खर्च करती है? दिवाली के दिन भारत में कुल कितने फोन कॉल किए जाते हैं?''*

आकलन कर पाना इसलिए भी एक महत्वपूर्ण कौशल है कि इससे बच्चों को तात्कालिक सन्दर्भ भी सीखने को मिलता है कि वास्तविक जीवन में समस्याएँ हमेशा पूरी जानकारियों के साथ सामने नहीं आतीं जैसा कि परीक्षा के प्रश्नपत्रों में होता है। आकलन और मूल्यांकन कौशलों की उपयोगिता हमारी सामान्य दिनचर्या में इनके लगातार होनेवाले इस्तेमाल से जाहिर होती है। ऐसे अभ्यासों से बच्चों का गणित के बारे में यह दृष्टिकोण बदल जाएगा कि यह विषय सिर्फ मोटे चश्मे वाले वैज्ञानिकों और उलझे बालों वाले गणितज्ञों के लिए है। तर्कसंगत और उचित आधार–मान्यताएँ आकलन का महत्वपूर्ण घटक होती हैं। यहाँ कुछ आकलनों के उदाहरण दिए जा रहे हैं जिनके बारे में आप त्रुटियों के बारे में चिन्ता किए बगैर मनन कर सकते हैं: (1) पचास निवासों वाले एक भवनखण्ड में रहने वाले लोग एक साल में कितने लीटर पानी का उपभोग कर लेंगे? (2) यदि किसी खोके में 1000 सेब ठसकर आ जाते हैं तो उसी खोके में कितने नींबू आ जाएँगे? (3) भारत की आबादी अपने सुबह के नाश्ते पर कितना पैसा खर्च करती है? (4) दीवाली के दिन भारत में कुल कितने फोन कॉल किए जाते हैं?

इस लेख में शब्दों की संख्या 1476 है। आपका अनुमान इसके कितना नजदीक था?

नट रामचन्द्रन *विलमिंग्टन, डेलावेयर में कार्यरत हैं। औसतन तो सूर्य के धब्बों सहित दुनिया भर की तमाम चीजों के बारे में उनकी एक व्यक्तिगत राय होती है। उनकी रुचि विकासमूलक विज्ञान, राजनैतिक दर्शन व शिक्षा के क्षेत्रों में है। साथ ही वे शान्तिपूर्ण विश्व की प्राप्ति के साधन के रूप में नास्तिकता की वकालत करते हैं। अपने खाली समय में वे खुद को कार्टून कार्यक्रम ''द सिंप्सन्स'' के चरित्र ''होमर सिंप्सन'' से जुड़ा देखते हैं। उनसे* Natarajan.ramachandran@gmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

9 गणित के शिक्षण में क्या खामी है?

डी डी करोपाडी



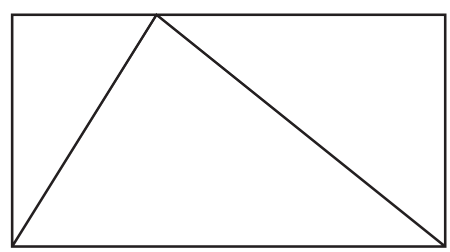
यदि स्कूल के बच्चों से पूछें कि कौन–सा विषय उन्हें सबसे अधिक नापसन्द है तो इस बात की काफी सम्भावना है कि 10 में से 9 बच्चों का जवाब होगा गणित। वस्तुतः अगर आप थोड़ी और गहराई से जाँच करें तो आप पाएँगे कि वे या तो इस विषय से 'आतंकित' हैं या फिर 'भीषण रूप से डरे हुए'। सिर्फ बच्चे ही क्यों, आप किसी वयस्क व्यक्ति से भी यही प्रश्न पूछें तो भी आपको कुछ इसी तरह का जवाब मिलेगा। मैंने अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन के अन्दर और बाहर के अपने मित्रों में कुछ से अनायास बातचीत में पूछा कि, 'जब मैं गणित कहता हूँ तो आपके मन में प्रतिक्रिया स्वरूप तत्काल कौन–से शब्द कौंधते हैं?' बहुत थोड़े–से लोगों को छोड़ कर अधिकांश के जवाब बेहद नकारात्मक थे। असफलता का डर, बेहद कठिन, स्कूल में पिछड़ना, दुरूह, जीवन से कोई सम्बन्ध नहीं, फार्मूलों को रटना, मैं मूर्ख हूँ क्योंकि मुझे गणित नहीं आता, यह सिर्फ़ बुद्धिजीवी लोगों के लिए है, सूखा, बोर करने वाला और इसी तरह के तमाम जवाब। एक जवाब ने तो जैसे सारे जवाबों को समेट लिया – 'हे भगवान!'। परीक्षा परिणामों के बाद बच्चे जब आत्मघाती कदम उठाते हैं तो कई सारे मामलों में इसकी वजह गणित होता है। प्रायः यह समस्या सिर्फ इस विषय तक ही सीमित नहीं होती, लेकिन अन्ततः इसके कारण बच्चे में 'स्कूली पढ़ाई–लिखाई' की पूरी प्रक्रिया के खिलाफ ही अरुचि पैदा हो जाती है।

इसके कारण जानने के लिए बहुत दूर जाने की आवश्यकता नहीं है, जिस तरह से हमारे शिक्षक इस विषय को स्कूलों में पढ़ाते हैं, वह इसकी एक बड़ी वजह है। प्राथमिक विद्यालयों के शिक्षकों के बीच एक अध्ययन कराने के बाद यह पता चला कि इनमें से कई 'कला' पृष्ठभूमि के होते हैं और गणित उनके सबसे कमज़ोर विषयों में से एक रहा होता है। जब वे स्वयं इस विषय के बारे में भयभीत रहते हैं तो यह स्वाभाविक है कि वे यह भय बच्चों में सम्प्रेषित कर देते हैं। दुर्भाग्यवश, गणित के अध्यापन में अधिक ध्यान परिभाषाओं, याद करने, स्मरण कर सकने, और गणना करने पर रहता है। इस बात का भी अत्यधिक प्रयास होता है कि सवालों को 'सही सन्दर्भ में रखा जाए' और उन्हें वास्तविक जीवन के लिए 'उपयोगी' बनाया जाए।

कई बार, कई लोगों के मन में यह बात बैठी रहती है कि गणित 'विज्ञान' से बेहद नजदीकी से जुड़ा है, और वे इसे उसी तरह देखते हैं। यह सही है कि गणित का उपयोग विज्ञान में किया जाता है, लेकिन दोनों स्पष्ट रूप से अलग–अलग हैं। विज्ञान का मजबूत आधार है प्रयोग, जबकि गणित काल्पनिक और अमूर्त है। इसे करने के लिए आपको किसी उपकरण या प्रयोगशाला की आवश्यकता नहीं होती। अगर इसे सही ढंग से किया जाए तो यह बहुत अधिक आनन्ददायक हो सकता है। अपने लेख 'अ मैथेमेटेशियन्स लेमेंट' में पॉल लॉकर्ट कहते हैं, ''गणित एक कला है, और बात सिर्फ इतनी है कि हमारी संस्कृति में उसे इस तरह की मान्यता नहीं मिली है। तथ्य यह है कि गणित के जैसा स्वप्निल और काव्यात्मक, क्रान्तिकारी और चेतना के नए आयाम खोलनेवाला कोई और विषय नहीं है। यह मस्तिष्क को उसी तरह झकझोरनेवाला है जैसे कि ब्रह्माण्डविज्ञान या भौतिकी विज्ञान (खगोलज्ञों के वास्तव में ब्लैक होल ढूँढने से बहुत पहले ही गणितज्ञों ने इनकी कल्पना कर ली थी)। हम एक संस्कृति के तौर पर यह नहीं जानते हैं कि वास्तव में गणित क्या है। हमें यह आभास दिया जाता है कि यह बहुत ही ठण्डा और अत्यधिक तकनीकी विषय है जिसे सम्भवतः कोई भी समझ नहीं सकता – अगर खुद को पूरा करने वाली कोई भविष्यवाणी कभी की गई है तो वह यही है।''

लॉकर्ट के अनुसार, गणित का कोई गुप्त व्यावहारिक उद्देश्य नहीं है। यह तो केवल अपनी कल्पनाओं से खेलने, विस्मित होने और अपना मनोरंजन करने का क्रियाकलाप है। वह एक आकृति से इसका सुन्दर उदाहरण देते हैं। वे कहते हैं कि ''एक बॉक्स के भीतर त्रिभुज की कल्पना कीजिएः''

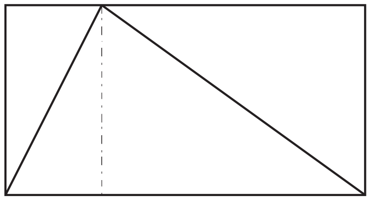
चित्र 1



स्रोतः अ मैथेमेटिशियन्स लेमेंट – पॉल लॉकर्ट

फिर वे आगे पूछते हैं, ''क्या यह त्रिभुज बॉक्स का दो–तिहाई तक हिस्सा ढक रहा है? यहाँ सिर्फ कल्पनाशक्ति से ही सच तक पहुँचा जा सकता है। इस मामले में, एक तरीका यह है कि बॉक्स को दो टुकड़ों में बाँट दिया जाए जैसा कि चित्र–2 में दर्शाया गया है।

चित्र 2



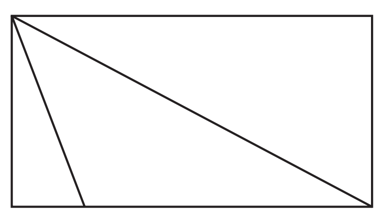
अब, यह देखा जा सकता है कि प्रत्येक टुकड़ा एक अलग आयत है, और दोनों को त्रिभुज की भुजाएँ दो हिस्सों में बाँट रही हैं। इस तरह, जितना स्थान त्रिभुज के अन्दर है उतना ही उसके बाहर भी है। इसका मतलब यह है कि त्रिभुज बॉक्स का आधा हिस्सा घेरता है। अब, यह रेखा खींचने का विचार मन में कैसे आया? यह प्रेरणा है, अनुभव है, सूझ आजमाना और गलती करके सीखना, या फिर सिर्फ अच्छी किस्मत भी हो सकता है। यही इसकी कला है। दो आकारों में सम्बन्ध तब तक एक रहस्य था जब तक कि रेखा ने इसे स्पष्ट नहीं कर दिया। मैं इसे नहीं देख पा रहा था, फिर अचानक ही मैं इसे देख सकता था। किसी तरह से, मैं किसी स्थूल चीज़ के बिना भी गहरी सहज सुन्दरता रचने में कामयाब हुआ। क्या कला का सारा सरोकार यही नहीं है?''

'''सोच ऐसी होनी चाहिए कि यह विषय जिज्ञासा, खोज और रोमांच का एक सफ़र बन सके। यह पूरा विषय ही संरचनाओं के बारे में है; उन्हें देखने तथा उनकी छानबीन करने के तरीके खोजने, गलतियाँ करने, स्वयं से और नए प्रश्न करने, और नए उत्तर तलाश करने और अपने मस्तिष्क को अनखोजे क्षेत्रों में जाने देने के बारे में है।''

क्या बच्चों के लिए ऐसा करना ज्यादा मजेदार नहीं है, बजाय इसके कि उन्हें रटने के लिए कहा जाए – त्रिभुज का क्षेत्रफल इसके आधार और ऊँचाई के गुणनफल का आधा होता है – और इसे बार–बार सवालों में लागू करने के लिए कहा जाए। लॉकर्ट सूत्रों पर, या किसी सन्दर्भ से जुड़े दिलचस्प तथ्यों को याद रखने पर आपत्ति नहीं कर रहे हैं। वे कहते हैं, ''जो बात महत्वपूर्ण है वह है कई विकल्प पैदा करने की प्रक्रिया, और वह किस तरह अन्य सुन्दर विचारों को प्रेरित कर सकती है जिनके फलस्वरूप शायद किन्ही दूसरी समस्याओं का रचनात्मक समाधान निकले।'' वे आगे कहते हैं कि, ''गणित व्याख्या करने की कला है। अगर आप छात्रों को इस गतिविधि में सक्रिय भागीदारी करने के अवसर से वंचित करते हैं – यानी अपने खुद के सवाल बनाना, अपने स्वयं के अनुमान लगाना और खोज करना, गलत होना, रचनात्मक हताशा झेलना, अचानक कोई सूझ पा जाना, और खुद अपनी व्याख्याएँ और प्रमाण जुटाना, इस सबका मौका नहीं देते – तो आप उन्हें गणित से ही वंचित कर देते हैं। छात्र किसी दूसरे ग्रह से नहीं आए हैं। वे सुन्दरता और संरचनाओं से आकर्षित होते हैं और स्वाभाविक रूप से उतने ही जिज्ञासु होते हैं जितना कि कोई और। सिर्फ उनसे बात कीजिए! और इससे भी ज्यादा महत्वपूर्ण है कि उनकी बातों को ध्यान से सुनिए!''

तो क्या हमारे गणित के शिक्षक बच्चों को नई बातें खोजने, और अनुमान लगाने का समय देते हैं, या उनकी दिलचस्पी जगानेवाले सवाल चुनते हैं? क्या वे (शिक्षक) स्वस्थ बहस और पूछताछ का वातावरण निर्मित करते हैं, तथा जिज्ञासाओं के समाधान का पर्याप्त अवसर देते हैं? लॉकर्ट कहते हैं ''मुझे इस बात में सन्देह है कि अधिकांश शिक्षक बच्चों से ऐसा कोई सम्बन्ध रखना भी चाहते हैं। यह ज्यादा आसान है कि किसी पुस्तक की सामग्री का उपयोग किया जाए और 'व्याख्यान, परीक्षण और उसे दोहराना' की पद्धति का अनुसरण किया जाए – यह वह रास्ता है जिसमें सबसे कम मेहनत लगती है। अगर भिन्नों को जोड़ना शिक्षक के लिए कुछ अव्याख्य नियमों का पालन मात्र है, न कि एक रचनात्मक प्रक्रिया का परिणाम, तब निश्चित रूप से उन बेचारे छात्रों को भी यह वैसा ही लगेगा। अध्यापन का मतलब ही विद्यार्थियों से एक ईमानदार बौद्धिक रिश्ता बनाना है। इसमें किसी पद्धति, औजारों या प्रशिक्षण की आवश्यकता नहीं होती।''

अब बॉक्स में त्रिभुज के ऊपर दिए गए उदाहरण को ही लें। अगर यह त्रिभुज तिरछा होता तो क्या होता? अब हम रेखा कैसे खींचेंगे? ऐसे में क्या किया जा सकता है?
चित्र 3

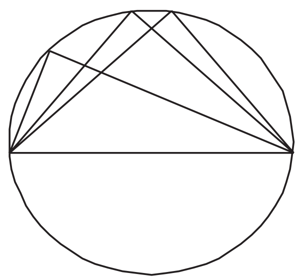


सोच कर प्रयास करें और विभिन्न सम्भावनाओं को आजमाएँ और समाधान खोजें। यही सब तो गणित है।

हमारे स्कूलों में ज्यामिति को बहुत ही बोझिल और उबाऊ विषय बना दिया जाता है, और इसे निरपवाद रूप से एक क्रम में समेट

दिया जाता है प्रमेय ––– प्रमाण ––– उपप्रश्न (राइडर)––– उसका हल और उसके बाद एक और उपप्रश्न। हाई स्कूलों में पढ़ाए जाने वाली ज्यामिति के बारे में लॉकर्ट ने कुछ कटु टिप्पणियाँ की हैं। ''छात्र (व्यवस्था का) शिकार होता है जिसे पहले तो बेतुकी परिभाषाओं, प्रस्थापनाओं और संकेतों की बौछार से भौंचक्का और पंगु बना दिया जाता है, फिर व्यवस्थित ढंग से धीरे–धीरे और बड़ी मेहनत करके उसके दिमाग में तथाकथित ज्यामितीय सबूतों को अस्वाभाविक भाषा और कृत्रिम प्रारूपों के जरिए भरा जाता है, और इस तरह उसे आकृतियों और उनकी संरचनाओं के बारे में सहज जिज्ञासा तथा अन्तर्दृष्टि से दूर कर दिया जाता है। ज्यामिति की कक्षा शायद 12वीं तक के गणित के पूरे पाठ्यक्रम में मानसिक और भावनात्मक रूप से सबसे ज्यादा विनाशकारी होती है।'' वे एक अर्द्धवृत्त के भीतर खींचे गए त्रिभुज का बहुत सुन्दर उदाहरण देते हैं, और यह तथ्य भी कि आप त्रिभुज की नोक को वृत्त की परिधि पर कहीं भी रखें वह हमेशा एक समकोण बनाता है।

चित्र 4



पहली नज़र में यह असम्भव लगता है। फिर प्रश्न यह पूछा जाना चाहिए कि यह किस प्रकार सत्य हो सकता है। यहाँ एक अवसर है जो छात्रों को दिया जाना चाहिए इसकी खोजबीन करने के लिए और यह देखने का प्रयास करने के लिए कि यह किस प्रकार सम्भव है? या फिर आजमा कर देखें कि शायद यह सच न हो? लेकिन हम बस यह करते हैं कि हम उन्हें एक पारम्परिक 'सबूत' दे देते हैं जिसे उन्हें याद रखना पड़ता है।

ज्यामिति में, छात्रों से यह पूछना कैसा रहेगा कि वे यह पता लगाएँ कि किसी नक्शे को इस प्रकार से रंगने में, जिसमें कि आस–पास के किन्ही भी दो राज्यों का रंग एक जैसा न हो, कम से कम कितने रंग लगेंगे? क्या आप किसी खास आकार के बारे में सोच सकते हैं जिसमें इनसे ज्यादा रंग लगें? ऐसे कौन से विशेष आकार हैं जिन्हें कम रंगों से ही रंगा जा सकता है?

इसी तरह एक अन्य उदाहरण यह भी हो सकता है कि ज्यामितीय आकृतियों वाली ज़िग–सा पहेलियों की रचना की जाए। बच्चों के लिए सिर्फ इन टुकड़ों से खेलना, और उन्हें उलटना, पलटना भी आनन्द और सीखने का एक बड़ा स्रोत हो सकता है। इस प्रक्रिया में वे विभिन्न आकार और अन्य भी बहुत कुछ खोज सकते हैं ।

बच्चे (और वयस्क भी) कुछ नया खोज लेने पर रोमांचित होते हैं। यह खोज तब और अधिक रोमांचकारी होती है जब यह दुर्घटनावश हो जाए। हम अपने बच्चों से पहाड़े याद करवाते हैं। पर अगर बच्चे अंकों की अलग–अलग संरचनाओं की खोजबीन करें तो वह कितना अधिक मजेदार होगा?

यह कितना रोमांचकारी होगा अगर बच्चे इसकी खोज स्वयं करें? जैसे अंक 9 का ही मामला लीजिए।

9 X 1 = 9	0 + 9 = 9
9 X 2 = 18	1 + 8 = 9
9 X 3 = 27	2 + 7 = 9
9 X 4 = 36	3 + 6 = 9

....

.... और इसी तरह आगे भी।

अब बच्चों से कुछ दूसरे अंकों जैसे 3, 5, 11, 15.... आदि के बारे में भी ऐसे ही दिलचस्प तथ्य पता करने को कहें।

आपने आजकल बसों, ट्रेनों में कई लोगों को पेंसिल चबाते हुए अखबारों में अंकों को लिखते, उन्हें ठीक करते और फिर दोबारा लिखते देखा होगा। वे सुडोकू को हल कर रहे होते हैं जो इन दिनों बहुत प्रचलन में है। इसकी मनोरंजन के अलावा कोई दूसरी व्यावहारिक उपयोगिता नहीं है। इसका एक सरल रूप – जादुई वर्ग (मैजिक स्क्वेयर) – बच्चों को खेलने के लिए दिया जा सकता है। इनमें सबसे सरल है 3 X 3 का जाल जिसमें 1 से 9 तक के अंकों को इस तरह भरना होता है कि हर पंक्ति, हर स्तम्भ और प्रत्येक कर्ण रेखा का जोड़ 15 हो। इस तरह के जादुई वर्गों के कई बड़े जाल भी बनाए जा सकते हैं।

जादुई वर्ग

जादुई वर्गों ने प्राचीन काल से ही गणितज्ञों को अपनी ओर आकर्षित किया है। ऐसा प्रतीत होता है कि इसकी उत्पत्ति सबसे पहले (और कहाँ) चीन में करीब 2800 ईसा पूर्व हुई। भारत में, 11 या 12वीं शताब्दी में इस कल्पना के सन्दर्भ देखे गए हैं और इसके कुछ उदाहरण प्राचीन शहर खजुराहो में पाए गए हैं।

जादुई वर्ग को एक जाल (ग्रिड) में क्रमवार अंकों की जमावट के रूप में परिभाषित किया जाता है, इसमें शुरुआत इस ढंग से होती है

कि हर अंक सिर्फ एक बार आता है और हर पंक्ति, हर स्तम्भ और हर प्रमुख कर्ण रेखा में इनका योग वही रहता है। कई जादुई वर्गों में अंकों की शुरुआत 1 से होती है, इन्हें सरल जादुई वर्ग कहा जाता है।

सबसे छोटा (और सबसे साधारण) जादुई वर्ग है 1 X 1 का जाल।
इसके बाद का जादुई वर्ग 3 X 3 का जाल होता है इसमें 1 से 9 तक के अंक होते हैं। प्रत्येक पंक्ति, स्तम्भ और प्रमुख कर्ण रेखा का योग 15 होता है जैसा कि नीचे दिखाया गया है।(2 X 2 का जादुई वर्ग बनाना सम्भव नहीं है। क्या आप बता सकते हैं क्यों?)।

4	9	2
3	5	7
8	1	6

पंक्तियों और स्तम्भों की जगह बदल कर एक जादुई वर्ग से कई नए वर्ग रचना भी सम्भव होता है।

जैसे–जैसे हम बड़े वर्गों की ओर बढ़ते जाते हैं, दिलचस्प सम्भावनाएँ और विविधताएँ बढ़ती जाती हैं। एक 4 X 4 के वर्ग में कुल योग 34 होता है और इसे इस प्रकार रचा जा सकता है कि इसके कोनों में स्थित चार छोटे वर्गों का जोड़ भी उसी योग पर पहुँच जाए (इसे लेख में आगे दिखाया गया है)। बड़े वर्गों में कई अन्य दिलचस्प विविधिताएँ होती हैं जैसे 'गुणन का जादुई वर्ग' जहाँ प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तम्भ और प्रत्येक मुख्य कर्ण रेखा के चौखानों का गुणनफल समान रहता है। एक और विशिष्ट वर्ग वह भी होता है जिसमें प्रत्येक पंक्ति, स्तम्भ और मुख्य कर्ण रेखा का योग और गुणनफल भी समान रहता है।

एक अन्य प्रकार प्रतिलोम जादुई वर्ग (एंटी मैजिक स्क्वेयर) होता है। यह ऐसा जाल होता है जिसके चौखानों में एक से शुरू करके अंकों को इस तरह भरा जाता है कि प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तम्भ और प्रत्येक मुख्य कर्ण रेखा का योग भिन्न होता है और यह एक सिलसिलेवार क्रम में होता है।

नीचे दिए गए 4 X 4 के वर्ग को देखें।

15	2	12	4
1	14	10	5
8	9	3	16
11	13	6	7

क्या आप दिए गए अंकों का अलग–अलग योग करके उनके सिलसिलेवार क्रम में होने की जाँच कर सकते हैं?

ऊपर दी गई परिभाषा के अनुसार, 4 X 4 से छोटे प्रतिलोम जादुई वर्ग (एंटी मैजिक स्क्वेयर) बनाना सम्भव नहीं है। कुछ लोग नीचे दिए गए वर्ग को प्रतिलोम जादुई वर्ग मानते हैं। परन्तु यह इस शर्त को पूरा नहीं करता कि योग सिलसिलेवार क्रम में हों।

7	6	5
8	9	4
1	2	3

आप यह देख सकते हैं कि इस वर्ग को निचले बाएँ कोने से घड़ी की विपरीत दिशा में घूमते हुए बनाया गया है।

जादुई वर्गों का एक अन्य प्रकार है 'लैटिन वर्ग'। इसमें, चौखानों में दिए गए अंकों को दोहराया जाता है लेकिन उसी पंक्ति या उसी स्तम्भ में नहीं। सबसे सरल, निश्चित तौर पर 2 X 2 का वर्ग है।

1	2
2	1

क्या आप 3 X 3 का अगला सरल लैटिन वर्ग बना सकते हैं? यह बहुत कठिन नहीं है।

आपको अब यह समझ आ चुका होगा कि ''सुडोकू'' दरअसल 9 X 9 का लैटिन वर्ग है।

इसके अलावा ऐसी कई अन्य जादुई आकृतियाँ होती हैं – जैसे घन (क्यूब), वृत्त (सर्किल), तारे (स्टार) और इनके अलावा ढेर सारे कल्पनाशील विविध रूप।

मेरे सबसे प्रिय जादुई वर्गों में से एक है अल्फा जादुई वर्ग। नीचे दिए गए वर्गों को देखें:

5	22	18
28	15	2
12	8	25

4	9	8
11	7	3
6	5	10

दाएँ वर्ग के भीतर के अंकों को बाईं ओर के वर्ग के अंकों से निकाला गया है। क्या आप इनमें सम्बन्ध स्थापित कर सकते हैं? (संकेतः बाएँ वर्ग के अंकों को अंग्रेज़ी में लिखें)

जादुई वर्गों की खूबसूरती हर वर्ग के भीतर की संरचनाओं को खोज निकालने और दिए गए हल से अन्य वैकल्पिक हल तलाशने की प्रक्रिया में निहित होती है। नीचे दिए गए एक दिलचस्प उदाहरण पर नज़र डालें, इसमें 16 चौखाने हैं जिनमें 1 से 16 तक के अंक भरे हैं।

1	8	12	13
14	11	7	2
15	10	6	3
4	5	9	16

आप यहाँ देख सकते हैं कि प्रत्येक पंक्ति, प्रत्येक स्तम्भ और प्रत्येक मुख्य कर्ण रेखा का योग 34 होता है। क्या आपको कुछ और संरचनाएँ भी दिखाई देती हैं?

अगर आप गौर से अध्ययन करें, तो आप पायेंगे कि दाएँ हाथ के कोने में ऊपरी चार चौखानों के अंकों (13,12,7 और 2) का योग भी 34 होता है; और यही क्यों, हर कोने के चार चौखानों का योग भी 34 ही है। इस जाल में ऐसे कई चौखाने हैं जिनका योग 34 है। क्या आप उनका पता लगा सकते हैं? इसके अन्य कौन से हल हो सकते हैं? क्या चौखानों की सम संख्या वाले प्रत्येक जाल में, कोने के चौखानों के योगों में यही गुण दिखाई देगा?

क्या यह गणित सिखाने का अधिक दिलचस्प और मजेदार ढंग नहीं है? ऐसे कई दूसरे तरीके हैं जिनसे गणित सीखने को एक

आनन्ददायक प्रक्रिया बनाया जा सकता है। मैं यह कहने का प्रयास नहीं कर रहा हूँ कि गणित की हर एक बात इस रास्ते से सिखाई जा सकती है, या सिखाई जाना चाहिए। पर सोच ऐसी होना चाहिए कि यह विषय जिज्ञासा, खोज और रोमांच का एक सफ़र बन सके। यह पूरा विषय ही संरचनाओं के बारे में है; उन्हें देखने तथा उनकी छानबीन करने के तरीके खोजने, गलतियाँ करने, स्वयं से और नए प्रश्न करने, और नए उत्तर तलाश करने और अपने मस्तिष्क को अनखोजे क्षेत्रों में जाने देने के बारे में है। गणित करने की प्रक्रिया अपने आप में उसके परिणामों से अधिक महत्वपूर्ण बनना चाहिए। लक्ष्य यह होना चाहिए कि गणित के नाम से उत्पन्न होने वाला 'भय' दूर कर दिया जाए। इसका परिणाम यह भी हो सकता है कि बच्चे न सिर्फ इस विषय में रस लेने लगें बल्कि स्कूली पढ़ाई की पूरी प्रक्रिया में भी आनन्द लेने लेंगे क्योंकि उसका 'डरावना' हिस्सा गायब हो चुका होगा। निश्चित ही, इस प्रक्रिया की शुरुआत हमारे शिक्षकों से करना होगी, जिन्हें स्वयं ही गणित में सुन्दरता की छानबीन को 'सुगम बनाने' की कला को फिर से सीखने की जरूरत है।

यह लेख पॉल लॉकर्ट के लेख 'अ मैथेमेटिशियनश्स लेमेंट' से प्रेरित और काफ़ी हद तक उसी पर आधारित है। मूल लेख को http://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf. लिंक पर पढ़ा जा सकता है। वे लोग जिन्हें गणित नापसन्द है इस लेख को 'ज़रूर पढ़ें', और वे जो इस विषय से प्रेम करते हैं इस लेख को पढ़ने से न चूकें।

लेख में आए सन्दर्भः

1. Weisstein, Eric W. "Magic Square." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://Mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html
2. Weisstein, Eric W. "Antimagic Square." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://Mathworld.wolfram.com/AntimagicSquare.html
3. Weisstein, Eric W. "Alphamagic Square." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://Mathworld.wolfram.com/AlphamagicSquare.html

---

डी. डी. करोपाडी *अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन, बंगलौर में रिसर्च और डॉक्यूमेंटेशन के प्रमुख हैं। इससे पूर्व वे, भारत की एक अग्रणी बाज़ार–शोध संस्था के निदेशक रहे हैं। 25 साल के कॉर्पोरेट अनुभव के साथ, वे पिछले 8 वर्षों से विकास के क्षेत्र में काम कर रहे हैं। उनसे* karopady@azimpremjifoundation.org *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*



10 हमारे गणित के शिक्षक कितने योग्य हैं?

स्कूलटैल्स सर्वेक्षण के निष्कर्ष

गीता गाँधी किंगडॉन और रुक्मिणी बनर्जी





सार संक्षेप

स्कूलटैल्स सर्वेक्षण के अन्तर्गत प्राथमिक स्कूली गणित की एक परीक्षा में शिक्षकों के दयनीय प्रदर्शन से संकेत मिलता है कि स्कूलों में बच्चों की निम्नस्तरीय उपलब्धियों का एक विश्वसनीय कारण उनके शिक्षकों में योग्यता का अभाव है। शिक्षकों के गणितीय कौशलों के वस्तुपरक मूल्यांकन से शिक्षकों की खुद के बारे में निजी दृष्टियों का भी ठीक मेल बैठता हैः सर्वेक्षण नमूने में शामिल लगभग 80 प्रतिशत शिक्षक किसी हद तक इस वक्तव्य से सहमत थे कि ''मुझे कभी–कभी अपने विद्यार्थियों की जिज्ञासाओं और समस्याओं का समाधान करने में दिक्कतें आती हैं।'' मूल्यांकन में प्राप्त जानकारियों के शिक्षकों की भर्ती नीति और शिक्षकों के प्रशिक्षण (पूर्व तथा सेवाकालिक), दोनों के लिए स्पष्ट निहितार्थ हैं।

हालाँकि प्राथमिक स्कूलों के बच्चों के गणना कौशलों में योग्यता के निम्नस्तर के पीछे कई कारण हो सकते हैं (एएसईआर, 2005–2008)। फिर भी एक सम्भावित प्रमुख कारण– शिक्षकों की योग्यता के निम्नस्तर के होने की सम्भावना – पर शोध में, सार्वजनिक बहस में या शिक्षानीति में बहुत कम ध्यान दिया गया है। जहाँ व्यक्तिगत अनुभवों के आधार पर, शिक्षकों के निम्नस्तरीय कौशल और निर्धारित पाठ्यपुस्तकों को पढ़ाने की उनकी क्षमता के बारे में चिन्ता तो व्यक्त की गई है, वहीं हमारी जानकारी में भारत में इस मुद्दे पर व्यवस्थित प्रमाण बहुत कम हैं।

स्कूलटैल्स सर्वेक्षण (किंगडॉन, बनर्जी और चौधरी), 2008 के अन्तर्गत हमने 2007–08 के स्कूली सत्र में बिहार तथा उत्तर प्रदेश के 10 जिलों में प्राथमिक स्कूल शिक्षकों के गणित (तथा हिन्दी भाषा) के संज्ञानात्मक कौशलों का परीक्षण किया। गणित में हमने इन पहलुओं को परखा : (अ) शिक्षकों का कक्षा 4–5 के स्तर के बुनियादी गणितीय प्रक्रियाओं का ज्ञान, अर्थात् क्या शिक्षक को स्वयं उस विषयवस्तु का ज्ञान है जिसे पढ़ाने का उस पर दायित्व है; (ब) बच्चों की गलतियाँ पकड़ने में शिक्षकों की दक्षता, और (स) गणित की अवधारणाओं को आसानी से पकड़ में आ सकने वाले सरल चरणों में समझा सकने की योग्यता। मूल्यांकन के लिए दिए गए कार्य उन सामान्य गणितीय कार्यों के अनुरूप थे जो प्राथमिक स्कूल शिक्षकों को नित्य ही कक्षा में करना पड़ते हैं।

शिक्षकों के टेस्ट तैयार करने के लिए हमने उत्तर प्रदेश और बिहार के प्राथमिक स्कूलों में प्रचलित गणित की पाठ्यपुस्तकों में दी गई सामग्री को ध्यान से देखा। उदाहरण के लिए शिक्षकों को प्रतिशत के, और क्षेत्रफल की गणना करने के सामान्य सवाल दिए गए (नीचे बाक्स में)। ऐसे सवाल राज्यों की कक्षा 4–5 की पाठ्यपुस्तकों में हैं।

अध्यापकों से सवालों को हल करने के लिए (ज्ञान/योग्यता की परीक्षा), और हलों को चरणबद्ध ढंग से एक–एक कदम स्पष्ट करते हुए लिखने के लिए (समझाने की क्षमता की परीक्षा) कहा गया। हमने शिक्षकों को ऐसे कार्य भी दिए जिनसे बच्चों की गलतियाँ पकड़ने की उनकी क्षमता की परीक्षा हुई। उदाहरण के लिए, हमने उन्हें भाग के एक सवाल के बच्चों द्वारा किए गए हलों के तीन उदाहरण दिखाए (चित्र 1), और उनसे यह बताने को कहा कि किस बच्चे का हल सही था। टेस्ट के उत्तरों को जाँचने और अंक देने का काम बिहार स्टेट काउंसिल ऑफ ऐजुकेशनल रिसर्च एण्ड ट्रेनिंग (बीएससीईआरटी) के माध्यम से वरिष्ठ अध्यापकों द्वारा पटना में किया गया।

दो प्रश्न जो जाँचते हैं कि 'क्या शिक्षक जानता है?'

प्रतिशत का प्रश्न

किसी कक्षा में 55 बच्चे हैं। इनमें से 32 के पास पुस्तकें हैं। कितने प्रतिशत बच्चों के पास पुस्तकें नहीं हैं ?

क्षेत्रफल का प्रश्न

एक लीची का पौधा लगाने के लिए आपको 25वर्ग मीटर जमीन चाहिए। रमेश के पास एक खेत है जो 80 मीटर लम्बा और 70 मीटर चौड़ा है। वह अपने खेत में अधिक से अधिक कितने लीची के पेड़ लगा सकता है?

एक प्रश्न जो इस बात की परीक्षा लेता है कि 'क्या शिक्षक बच्चों के काम में गलतियाँ पकड़ सकते हैं,'

(शिक्षक को पहचानना था कि भाग के एक सवाल के इन तीन हलों में से कौन–सा हल सही है?)

> *"प्राथमिक स्कूल के गणित के सवालों में शिक्षकों के ऐसे दयनीय प्रदर्शन से साफ संकेत मिलते हैं कि स्कूलों में बच्चों की गणित में निम्नस्तरीय उपलब्धियों के पीछे एक बहुत संभावित कारण शिक्षकों की निम्नस्तरीय योग्यता है।"*

टेस्ट से प्राप्त जानकारियाँ गम्भीर हैं: केवल 25% शिक्षक ही प्रतिशत का सवाल हल कर सके (तालिका 1)। बिहार के शिक्षकों का प्रदर्शन उत्तर प्रदेश के शिक्षकों से बेहतर था, और शासकीय स्कूलों के नियमित शिक्षकों ने निजी स्कूलों के शिक्षकों तथा अतिरिक्त शिक्षकों (पैरा टीचर्स) से काफी अधिक अच्छा प्रदर्शन किया (हालाँकि, नियमित शिक्षकों की अनुपस्थिति दर – जो यहाँ नहीं दिखाई गई है – भी बहुत ज्यादा थी)। लेकिन सबसे अच्छा प्रदर्शन करने वाले शिक्षकों के समूह – बिहार के नियमित शिक्षक – में से भी केवल 43% ही प्रतिशत का सवाल सही हल कर सके, जिससे पता चलता है कि प्राथमिक स्कूल का गणित सिखाने वालों में स्वयं योग्यता की कितनी ज्यादा कमी है। केवल 28% शिक्षक ही क्षेत्रफल का प्रश्न हल कर सके (तालिका 2)।

शासकीय विद्यालयों के नियमित अध्यापकों का प्रदर्शन अतिरिक्त शिक्षकों से (और उत्तर प्रदेश में निजी स्कूलों के शिक्षकों से) बेहतर था। लेकिन फिर भी बिहार में केवल 29% और उत्तर प्रदेश में 30% नियमित शिक्षक ही क्षेत्रफल का प्रश्न सही ढंग से कर सके। पर 'समझाने की योग्यता' और 'गलतियाँ पकड़ने की योग्यता' के क्षेत्रों में सभी प्रकार के शिक्षकों (नियमित, अतिरिक्त, निजी) का प्रदर्शन एक–दूसरे से मिलता–जुलता था। मतलब यह था कि उनके गणित के समग्र प्राप्तांकों में एक–दूसरे से इतना ज्यादा अन्तर नहीं था जितना अन्तर उनके 'गणितीय ज्ञान' के क्षेत्र में दिखाई दिया, जिसकी परीक्षा प्रतिशत और क्षेत्रफल के सवालों द्वारा ली गई थी।

गणित को समझाने की योग्यता कम आँकी गई क्योंकि अनेक शिक्षक अपने हलों को स्पष्ट, व्यवस्थित चरणों में दर्शा सकने में असमर्थ थे। गलतियाँ पकड़ने की क्षमता थोड़ी बेहतर थी पर वह भी परिपूर्ण नहीं थी : 15% नियमित शिक्षक तथा 26% अतिरिक्त शिक्षक ठीक–ठीक नहीं पहचान सके कि भाग के एक साधारण सवाल (927 में 9 का भाग) के तीन बच्चों द्वारा किए गए हलों में से कौन–सा सही था। प्राथमिक स्कूल के गणित के सवालों में

तालिका 1

उत्तर प्रदेश में, नियमित शिक्षकों की अनुपस्थिति दर 25% है और अतिरिक्त शिक्षकों तथा निजी स्कूलों के शिक्षकों की क्रमशः 12% और 17% है। इसी प्रकार, उत्तर प्रदेश में नियमित शिक्षकों का औसत वेतन (जनवरी 2008 में लगभग 12000 रु. प्रति माह) एक अतिरिक्त शिक्षक के वेतन (3000 रु. प्रति माह) का लगभग चार गुना था, और किसी निजी स्कूल शिक्षक के वेतन (940 रु. प्रति माह) से 12 गुना से भी अधिक था। वेतन में यह अत्यधिक असमानता, छठवें वेतन आयोग की सिफारिशों के जून, 2009 में उत्तर प्रदेश में लागू होने के बाद, और भी बढ़ गई क्योंकि नियमित शिक्षकों का वेतन बढ़कर 18000 रु. प्रति माह हो गया। किंग्डॉन का अनुमान (2010 के लिए) है कि उत्तर प्रदेश में नियमित शिक्षक के वेतन का राज्य के प्रति व्यक्ति सकल घरेलू उत्पाद (जीडीपी) से अनुपात 17:1 है, जबकि आँकड़ों के अनुसार विकासशील देशों के लिए यह अनुपात 3:1 है।

प्रतिशत के प्रश्न में शिक्षकों का प्रदर्शन

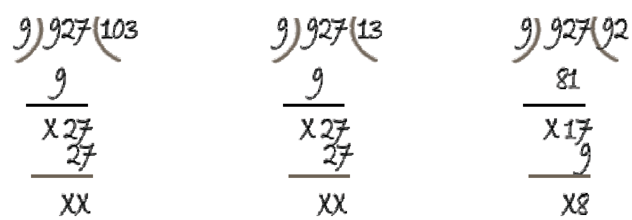
	बिहार				उत्तर प्रदेश			सभी
प्रतिशत का प्रश्न	नियमित	अतिरिक्त 05	अतिरिक्त 06	निजी	नियमित	अतिरिक्त	निजी	
प्रयास नहीं किया	14.4	12.0	26.4	37.0	16.7	23.5	28.6	20.6
अधूरा	32.7	48.8	46.2	25.9	40.0	40.0	54.6	42.6
गलत चरण और गलत उत्तर	5.8	6.4	5.5	11.1	10.0	3.5	1.3	5.7
सही चरण, गलत उत्तर	3.9	6.4	3.3	3.7	4.4	7.0	1.3	4.6
सिर्फ सही उत्तर, बिना किसी चरण के	0.0	1.6	3.3	0.0	1.1	4.4	2.6	2.1
सही पूर्ण हल	43.3	24.8	15.4	22.2	27.8	21.7	11.7	24.5
उन शिक्षकों का % जो इस प्रश्न से जूझने में असफल रहे (पंक्ति 1 से 3 तक)	52.9	67.2	78.1	74.0	66.7	67.0	84.5	68.9

तालिका 2

क्षेत्रफल के प्रश्न में शिक्षकों का प्रदर्शन

	बिहार				उत्तर प्रदेश			समग्र
क्षेत्रफल का प्रश्न	नियमित	अतिरिक्त 05	अतिरिक्त 06–07	निजी	नियमित	अतिरिक्त	निजी	
प्रयास नहीं किया	27.9	28.8	38.5	51.9	30.0	48.7	41.6	36.6
अधूरा	19.2	25.6	26.4	7.4	18.9	19.1	26.0	21.8
गलत चरण और गलत उत्तर	5.8	4.0	1.1	3.7	7.8	3.5	2.6	4.1
सही चरण, गलत उत्तर	3.9	3.2	8.8	0.0	4.4	1.7	5.2	4.1
सिर्फ सही उत्तर, बिना किसी चरण के	4.8	5.6	3.3	0.0	8.9	4.4	9.1	5.5
सही पूर्ण हल	38.5	32.8	22.2	37.0	30.0	22.6	15.6	27.9
उन शिक्षकों का % जो इस प्रश्न से जूझने में असफल रहे (पंक्ति 1 से 3 तक)	52.9	58.4	66.0	63.0	56.7	71.3	70.2	62.5

शिक्षकों के ऐसे दयनीय प्रदर्शन से साफ संकेत मिलते हैं कि स्कूलों में बच्चों की गणित में निम्नस्तरीय उपलब्धियों के पीछे एक बहुत सम्भावित कारण शिक्षकों की निम्नस्तरीय योग्यता है।



चित्र 1

गणितीय कौशलों को सिखाने की प्राथमिक स्कूल शिक्षकों की क्षमता को आँकने के अलावा हमने शिक्षकों से यह भी पूछा कि वे किस हद तक इस वक्तव्य से सहमत थे? ''मुझे कभी–कभी अपने विद्यार्थियों की जिज्ञासाओं और समस्याओं का समाधान करने में दिक्कतें आती हैं।'' तालिका 3 में स्वयं उनके द्वारा दिए गए आँकड़े हैं। ये दिखाते हैं कि शासकीय स्कूलों के शिक्षकों में से केवल लगभग 18% ने बिहार में और 22% ने उत्तर प्रदेश में कहा कि वे इस कथन से असहमत हैं, अर्थात लगभग 80% शिक्षक यह स्वीकार करते हैं कि उन्हें अपने विद्यार्थियों की गणितीय शंकाओं और समस्याओं का सामना करने में कुछ कठिनाई होती है। इनमें से भी बिहार में 25 प्रतिशत और उत्तर प्रदेश में 15% शिक्षक इस कथन से पूरी तरह सहमत हैं।

तालिका 3

उन शिक्षकों का प्रतिशत जो कहते हैं कि वे इस कथन से सहमत हैं, ''मुझे कभी–कभी अपने विद्यार्थियों की जिज्ञासाओं और समस्याओं का समाधान करने में दिक्कतें आती हैं''

	बिहार				उत्तर प्रदेश			
	पूर्ण सहमत	आंशिक सहमत	कुछ सहमत	असहमत	पूर्ण सहमत	आंशिक सहमत	कुछ सहमत	असहमत
शासकीय स्कूल शिक्षक	**24.5**	**11.0**	**46.8**	**17.7**	**15.2**	**18.3**	**43.1**	**22.3**
निजी स्कूल शिक्षक	**16.7**	**12.5**	**45.8**	**25.0**	**16.9**	**18.5**	**36.9**	**27.7**

प्राप्त जानकारी के निहितार्थ

प्राथमिक स्कूलों में शिक्षकों की भर्ती में एक आवश्यक मानदण्ड की तरह पढ़ाई जाने वाली सामग्री के शिक्षकों के ज्ञान की परीक्षा नहीं ली जाती। ऐसा शायद इसलिए है क्योंकि यह मान लिया जाता है कि शिक्षक की शैक्षणिक योग्यता और सेवापूर्व प्रशिक्षण यह सुनिश्चित कर

देगा कि उनके पास प्राथमिक कक्षाओं को पढ़ाने के लिए पर्याप्त ज्ञान और कौशल है, या शायद यह मान लिया जाता है कि ऐसी किन्हीं भी कमियों को बाद में सेवा के दौरान प्रशिक्षण के द्वारा पूरा किया जा सकता है। परन्तु ऐसा मान लेना जोखिम भरा और असत्य प्रतीत होता है क्योंकि हमारी हासिल की गई इन जानकारियों को देखते हुए कि शिक्षकों के 'सबसे अच्छे' समूह – शासकीय स्कूलों के नियमित शिक्षक जिनमें अधिकांश के पास बीए या एमए की शैक्षणिक योग्यता तथा सेवापूर्व का शिक्षक–प्रशिक्षण होता है – में भी योग्यता परीक्षा के अंक काफी कम हैं। यह मान्यता ऐसे प्रमाणों (जो यहाँ नहीं दिए गए हैं) को देखते हुए भी जोखिम भरा है कि शिक्षकों के योग्यता–प्राप्तांकों का उनकी शैक्षणिक योग्यता और सेवापूर्व प्रशिक्षण से सिर्फ क्षीण सम्बन्ध ही था।

इनमें ऐसा कमजोर पारस्परिक सम्बन्ध अलग–अलग शिक्षकों को प्राप्त होने वाली शिक्षा/प्रशिक्षण की गुणवत्ता में बहुत फर्क होने के कारण भी हो सकता है।

हालाँकि हो सकता है कि शिक्षकों को परीक्षण से डर लगे और वे इसका विरोध करें – खासकर जब बहुत कुछ दाँव पर हो (अर्थात यह वेतन, पदोन्नति या अनुबन्ध–नवीनीकरण से जुड़ा हो) – परन्तु बच्चों को ऐसे शिक्षकों के हवाले करना अनुचित है जो स्वयं उन पाठ्यपुस्तकों से पार नहीं पा सकते जिन्हें पढ़ाने का दायित्व उनके ऊपर होता है।

हमारी एकत्रित जानकारी के महत्वपूर्ण नीतिगत निहितार्थ भी हैं। प्रथम तो, टेस्ट से उजागर होने वाली कमियाँ शिक्षक–प्रशिक्षण महाविद्यालयों के भविष्य के सेवापूर्व प्रशिक्षण पाठ्यक्रम के लिए उपयोगी मार्गदर्शन प्रदान कर सकती हैं। दूसरे, शिक्षक टेस्ट भविष्य की भर्ती प्रक्रिया में ऐसे व्यक्तियों की पहचान करने में सहायक हो सकती हैं जिनमें पढ़ाने की योग्यता हो। तीसरे, शिक्षकों को ऐसे टेस्ट का स्वागत करना चाहिए क्योंकि इससे सेवा के दौरान उनकी प्रशिक्षण सम्बन्धी जरूरतें प्रगट होंगी, और उन्हें अपने कौशलों का स्तर ऊपर उठाने का अवसर मिलेगा – इससे पहले कि उन्हें ऐसा कोई औपचारिक टेस्ट देना पड़े जिसमें वाकई में बहुत कुछ दाँव पर लगा हो। और अन्त में, अधिकांश भारतीय राज्यों में प्राथमिक कक्षाओं में अलग–अलग विषयों के विशेषज्ञ शिक्षकों के लिए कोई प्रावधान नहीं है। परन्तु गणित के मामले में इसका प्रावधान किया जाना उपयोगी हो सकता है क्योंकि शिक्षकों में यह विशेष रूप से कमजोर कौशल का क्षेत्र है, और इसमें सभी शिक्षकों के कौशलों को उच्चस्तरीय बनाना कठिन हो सकता है।

लेख में आए सन्दर्भः

1. Kingdon, G., R. Banerji and P. Chaudhary (2008) "SchoolTELLS Survey of rural primary schools in Bihar and Uttar Pradesh, 2007-08".
2. Unpublished. Institute of Education, University of London.
3. Kingdon, Geeta (2010) "The teacher salary bonanza: Assessing equity and efficiency effects", Economic and Political Weekly, forthcoming 2010.

गीता गाँधी कग्डॉन *लन्दन विश्वविद्यालय के इंस्टीट्यूट ऑफ ऐजुकेशन में ऐजुकेशन इकॉनॉमिक्स एण्ड इन्टरनेशनल डेवलप्मेंट की अध्यक्ष हैं। इकॉनॉमिक्स ऑफ ऐजुकेशन पर उनके शोधकार्य में स्कूल की प्रभावशीलता, शिक्षकों को प्रोत्साहन, प्रभाव का मूल्यांकन, शिक्षा का राजनैतिक अर्थशास्त्र, और परिवारों में शिक्षा पर होने वाले खर्चे तथा श्रम बाजार में शिक्षा के लिए मिलने वाले पुरस्कारों, दोनों में होने वाले लिंगभेद आदि मुद्दों का सांख्यिकीय विश्लेषण शामिल है। उनसे* G.Kingdon@ioe.ac.uk *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

रुक्मिणी बनर्जी *1966 से प्रथम के साथ हैं* (www.pratham.org). *वे एएसईआर सेन्टर* (www.asercentre.org) *की निदेशक भी हैं। उनसे* rukmini.banerji@gmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

खण्ड स

कक्षा में

11 गणित का अर्थपूर्ण शिक्षण

देविका नाडिग और विजय गुप्ता



गणित के शिक्षण के साथ जुड़े मुख्य मुद्दों में से एक यह रहा है कि विद्यार्थियों का ज्ञान अधिकतर गणितीय प्रक्रियाओं तक ही सीमित रह जाता है। उदाहरण के लिए वे जोड़ने या गुणा करने की प्रक्रियाएँ तो जानते हैं लेकिन यह नहीं जानते कि किसी सवाल को हल करने के लिए उन्हें जोड़ने की जरूरत है या गुणा करने की। इसलिए हमारे सामने चुनौती यह है कि विद्यार्थियों के ज्ञान को केवल प्रक्रियात्मक (प्रोसीजरल) तक सीमित न रहने देकर उसे प्रक्रियावधारणात्मक (प्रोसेप्चुअल) समझ में बदलें। यहाँ प्रोसेप्चुअल शब्द (प्रोसीजरल) तथा 'कंसेप्चुअल' को जोड़कर बनाया गया है – इसमें 'कंसेप्चुअल' (अवधारणात्मक) का आशय है अवधारणाओं और उनके उपयोग दोनों की समझ होना – अर्थात विद्यार्थी प्रक्रियाओं के साथ–साथ सन्दर्भ से जुड़ी अवधारणाओं और उनके सही उपयोग को भी जाने। प्रोसेप्चुअल छात्र पाँच विशिष्टताओं को प्रदर्शित करते हैं – आइए, हम उनमें से प्रत्येक पर नज़र डालें।

पहला, प्रोसेप्चुअल छात्र विधि जानते हैं और अवधारणा को भी समझते हैं। आइए हम गुणन की परिचित प्रक्रिया का इस्तेमाल करते हुए उदाहरण सहित समझते हैं:

```
   25
 x 25
 ----
  125
  50x
 ----
  625
```

भारत में अलग–अलग राज्यों में छात्रों को इकाई के स्थान पर या तो क्रॉस (X) डालने के लिए, या उसे खाली छोड़ने के लिए या, एक शून्य रखने के लिए कहा जाता है। अधिकांश छात्र इस प्रक्रिया का मशीनी तौर पर अनुसरण करते हैं, बिना यह जाने कि ऐसा 'क्यों' किया जाता है। अवधारणा को समझने से हमारा मतलब यही जानना है।

दूसरा, प्रोसेप्चुयल छात्र सवाल को हल करने के लिए सबसे कुशल रणनीति का उपयोग करते हैं। निम्नलिखित योग में:

```
  299
 + 21
 ----
  320
```

यदि छात्र यह समझ ले कि वास्तव में प्रश्न को ऐसे देखा जा सकता है कि : 299 + 1 = 300 और फिर उसमें 20 जोड़ दिया जाए तो हो जाएगा 320, तो वह जान लेगा कि योग की प्रक्रिया से गुजरने की बजाय यह कहीं अधिक सफल रणनीति है।

तीसरा, छात्र यह परख पाता है कि उसका उत्तर तर्कसंगत है या नहीं। निम्नलिखित विभाजन में:

212 विभाजित 2

यदि छात्र का उत्तर 106 के बजाय 16 निकलता है, तो उसे यह देख सकना चाहिए कि 16 तर्कसंगत उत्तर नहीं है, और यह कि सही उत्तर 100 से कुछ अधिक होना चाहिए।

चौथा, प्रोसेप्चुअल छात्रों के पास ज्ञात तथ्यों की एक श्रेणी होती है। जैसे कि पिछले उदाहरण में छात्र यह जानता है कि 9 +1 =10 होता है और 300 + 20 = 320, उसके लिए ये ज्ञात तथ्य हैं। प्रोसेप्चुअल छात्रों के पास इस प्रकार के ज्ञात तथ्य अधिक होते हैं। यह भी एक कारण है कि क्यों गुणा करने वाले पहाड़ों को (अवधारणात्मक समझ के साथ) जानना एक काम आनेवाली अच्छी बात है।

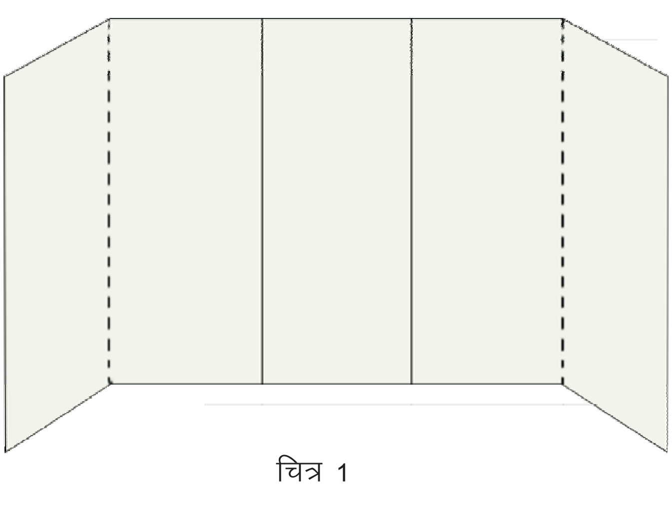
> “*यह एक अच्छा विचार है कि हमेशा किसी एक अवधारणा को स्पष्ट करने के लिए एक से ज्यादा विधियों का उपयोग किया जाए ताकि शिक्षक सुनिश्चित कर सके कि शिक्षार्थी अमुक अवधारणा को समझ गए हैं और इसके उपयोग के समय सहजता का अनुभव करते हैं।*”

अन्त में, प्रोसेप्चुअल छात्र ज्ञात तथ्यों का प्रयोग करते हुए अन्य तथ्यों को प्राप्त करते हैं। उसी उदाहरण में 299 + 21 होता है 320, जो ज्ञात तथ्यों से निकला है। अब यह एक नया ज्ञात तथ्य बन जाता है।

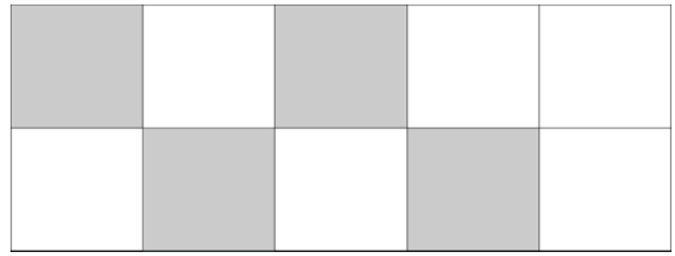
प्रोसेप्चुअल छात्रों की कई खूबियों को समझने के बाद चुनौती यह है कि – हम किस तरह से पढ़ाएँ ताकि गणित का हर छात्र प्रोसेप्चुअल हो जाए। यहाँ इसके लिए पढ़ाने की 5 ऐसी रणनीतियाँ प्रस्तुत हैं जिन्हें हमने शिक्षकों के साथ काम करने के अपने अनुभव में कारगर पाया है।

पहली, ठोस अनुभव के आधार पर शिक्षा दें। गणित अपनी प्रति में ही अमूर्त है –उदाहरण के लिए जैसे ही हम पाँच आमों को निरूपित करने के लिए अंक 5 लिखते हैं तो सीखने वाला अमूर्तकरण का एक चरण तय कर लेता है। इसलिए अमूर्तकरण में छलांग लगाने से पहले सीखने वाले को पहले कदम के रूप में स्थूल चीज़ों के साथ सहज हो जाना चाहिए। प्रत्येक सीखने वाला अपना अलग–अलग समय लेता है और हमें इस समय का ख्याल रखना चाहिए।

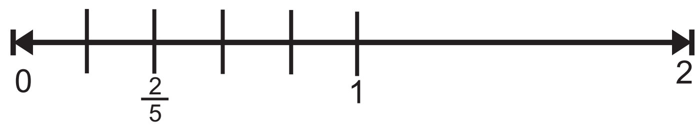
दूसरी, सीखने वाले को अवधारणाओं को निकालना या निरूपित करना सीखना चाहिए। आइए हम इस रणनीति को उदाहरण द्वारा समझें। भिन्न संख्या का विचार उन सबसे प्रारम्भिक कठिन अवधारणाओं में से एक है जिनसे गणित सीखने वाला गुजरता है। इस रणनीति में शिक्षक से यह आग्रह है कि वह सीखने वाले को भिन्न की अवधारणा को कई अलग–अलग तरीकों से निकालने या निरूपित करने के लिए प्रोत्साहित करे। शिक्षकों के साथ हमारे कार्य के दौरान हम भिन्न को दर्शाने के लिए तीन अलग–अलग तरीकों का इस्तेमाल करते हैं। एक, भिन्न संख्याओं को निरूपित करने के लिए कागज की पट्टी को तहों में मोड़ने का प्रयोग करते हैं। दो, भिन्न को निरूपित करने के लिए दिए गए समान आकार के चौखानों में से आवश्यक संख्या में चौखानों को उनसे छायांकित करवाते हैं। तीन, उनसे अंक रेखा पर दी गई भिन्न संख्या को अंकित करवाते हैं। नीचे दिए गए चित्र भिन्न संख्या 2/5 को समझाने (स्पष्ट) करने के तीनों तरीके दर्शाते हैं:



चित्र 1



चित्र 2



चित्र 3

अवधारणाओं को निकालने या निरूपित करने के लिए एक से अधिक तरीकों का इस्तेमाल करना हमेशा एक अच्छा विचार होता है। इससे शिक्षक पूरी तरह से आश्वस्त हो सकता है कि सीखने वाले ने उस अवधारणा को समझ लिया है और वह उसके लिए सहज हो गई है।

तीसरी, शिक्षक को प्रश्न हल करते समय अपनी स्वयं की रणनीति को शाब्दिक रूप में व्यक्त करना चाहिए। आइए इस विचार को स्पष्ट करने के लिए विभाजन के प्रारम्भिक प्रश्न का उपयोग करें। 212 विभाजित 2, इस सवाल को भाग के प्रचलित प्रारूप में लिखने के बाद शिक्षक अपनी नीति को यह कह कर शब्दों में स्पष्ट बयान कर सकता है कि ''मैं सबसे पहले 212 के सबसे बाएँ वाले 2 को 2 से विभाजित करता हूँ और भाज्य आता है 1, मैंने 2 को 2 में से घटाया और मिलता है 0, फिर मैं 212 की अगली संख्या को उतारता हूँ जो है 1, चूँकि 1, 2 से कम है, अतः 2, 1 को एक बार भी विभाजित नहीं कर सकता और इसलिए मैं भाज्य के रूप में 0 लिखता हूँ, फिर मैं सबसे दाईं ओर वाले 2 को उतारता हूँ और भाग देने के लिए अब नया अंक है 12, 12 को 2 पूरी तरह से 6 बार विभाजित कर सकता है और इसलिए जो उत्तर हमें मिलता है वह है 106; जैसा कि आप देख सकते हैं कि यदि संख्या 200 होती तो हमें उत्तर के रूप में 100 मिला होता लेकिन चूँकि संख्या 212 है जो 200 से थोड़ी अधिक है, तो हम 100 से थोड़े अधिक उत्तर की अपेक्षा करते हैं, और इसलिए यह उत्तर तर्कसंगत दिखाई देता है।'' अपनी स्वयं की रणनीति को बोल कर समझाने से शिक्षक सीखने वाले के लिए वैचारिक प्रक्रिया का नमूना पेश करता है, और सीखने वाले को भी सोचना शुरू करने में और उसकी स्वयं की रणनीति बनाने में भी मदद करता है।

चौथी, शिक्षक को किसी समस्या को सुलझाने के लिए हल की वैकल्पिक रणनीतियों का उपयोग करना चाहिए और सीखने वालों से भी ऐसा ही करवाना चाहिए। सीखने वालों से यह सोचने

लिए भी कहें कि कौन–सी रणनीति अधिक कुशलतापूर्ण है। आइए, हम एक सरल शाब्दिक सवाल लें – ''प्रशिक्षण प्राप्त कर रहे 50 शिक्षकों के एक समूह को किसी गतिविधि के लिए 10 चार्ट पन्नों की जरूरत है। यदि 1500 शिक्षकों को 50 के समूहों में प्रशिक्षण लेना हो तो कितने चार्ट पन्नों की आवश्यकता होगी।'' अब इस सवाल को कई तरीकों से हल किया जा सकता है। एक तरीका यह हो सकता है कि एक शिक्षक के लिए कितने चार्ट पेपर की आवश्यकता है यह निकालना (1/5), और फिर उसे 1500 से गुणा करना तो उत्तर के तौर पर 300 मिलता है। दूसरी विधि हो सकती है कि यह देखना कि 1500 शिक्षकों का मतलब है, ऐसे 30 समूह जिनमें प्रत्येक में 50 शिक्षक हों; और चूँकि एक बैच को 10 चार्ट पन्नों की आवश्यकता होती है, इसलिए 30 समूहों को 300 पन्नों की आवश्यकता होगी। तीसरी विधि हो सकती है अनुपात की धारणा का प्रयोग करना, यदि 50 शिक्षकों के लिए 10 चार्ट पन्नों की जरूरत है, तो समान अनुपात बनाए रखते हुए 1500 शिक्षकों के लिए कितने चार्ट पन्ने लगेंगे? इससे भी उत्तर 300 आएगा। अलग–अलग तरीकों को समझाकर और उनकी तुलनात्मक कुशलता की चर्चा करके हम सीखने वाले के लिए अवधारणाओं को सहज बनाते हैं।

पाँचवी, शिक्षक को निम्नलिखित दो प्रश्नों का अक्सर इस्तेमाल करना चाहिए ताकि सीखनेवाले अपने उत्तर के बारे में सोचने पर मजबूर हों:

1. आपने यह कैसे किया?
2. आप कैसे जानते हैं कि आप सही हैं?

एक ओर, जहाँ पहला प्रश्न सीखने वाले को समस्या हल करने में अपनायी गई रणनीति को शाब्दिक रूप में बताने पर मजबूर करता है, वहीं दूसरा प्रश्न उसे मजबूर करता है कि वह अपने उत्तर के तर्कसंगत होने का बचाव करे। यदि उत्तर सही भी हो तब भी ये प्रश्न प्रत्येक छात्र से पूछा जाना चाहिए।

हमने शिक्षकों के साथ अपने काम में यह पाया कि उनमें से कई हल करने की वैकल्पिक रणनीतियों के विचार के साथ सहज नहीं होते। उन्हें लगता है कि ऐसा करना छात्रों को उलझन में डालेगा, इसलिए हमें एक ही तरीके को पकड़े रहना चाहिए। हमारा विश्वास है कि इस प्रकार की सोच छात्र की चिन्तन प्रक्रिया को विधियों तक ही सीमित कर देती है, क्योंकि इससे वह सीखता है कि किसी समस्या को हल करने की एक–केवल एक–ही विधि है, और वही उसके लिए वैसे सवाल हल करने की विधि (अल्गोरिथिम) बन जाती है। अतः हमारे सामने मुख्य चुनौती खुद शिक्षकों को गणित में प्रोसेप्चुअल विचारक बनाने की है।

गणित में अर्थपूर्ण शिक्षण का पूरा जोर यह सुनिश्चित करने पर है कि प्रत्येक छात्र में अवधारणात्मक समझ विकसित हो, सवाल को हल करने के दौरान शिक्षक स्वयं अपनी सोच को छात्रों को स्पष्ट करे और छात्रों को उनकी सोच व्यक्त करने के लिए प्रेरित करे, और किसी सवाल को हल करने के लिए वैकल्पिक रणनीतियों का इस्तेमाल करके छात्रों के चिन्तन को विस्तार दे।

देविका नाडिग और विजय गुप्ता *पुणे स्थित शिक्षांगन फाउण्डेशन के संस्थापक हैं। शिक्षांगन–निजी और शासकीय दोनों प्रकार से संचालित समस्त शिक्षा क्षेत्र–प्राथमिक, द्वितीयक और तृतीयक– में काम करता है। अपने अस्तित्व के पिछले 3 वर्षों में शिक्षांगन ने स्कूल प्रमुखों, शिक्षकों, महाविद्यालयों के अध्यापकों तथा युवा वर्ग के साथ काम किया है। साथ ही सामाजिक प्रयासों के कई मूल्यांकन किए हैं। उनसे* vijay.shikshangan@gmail.com और devika@shikshangan.org *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

तर्क–गणित की दिमागी कसरतें

तीन खिलाड़ी अ, ब और स एक खेल में भाग ले रहे हैं और उन्हें एक के पीछे एक इस प्रकार से खड़ा किया जाता है कि अ, ब और स दोनों को देख सकता है; तथा ब केवल स को देख सकता है जबकि स दोनों में से किसी को भी नहीं देख सकता है। वहाँ पर कुल 7 टोपियाँ हैं जिनमें से 5 नीली और 2 लाल हैं। इन 7 टोपियों से एक–एक टोपी इन तीन लोगों में से प्रत्येक के सिर पर रख दी जाती है। पहले अ से पूछा जाता है कि क्या वह अपने सिर पर रखी टोपी का रंग बता सकता है। उसका जवाब होता है 'नहीं' यही सवाल ब से भी पूछा जाता है उसका जवाब भी 'नहीं' होता है। जब यह प्रश्न स से पूछा जाता है तो उसका जवाब 'हाँ' होता है और वह सही रंग बता देता है। यह मानते हुए कि तीनों खिलाड़ी तार्किक रूप से सोच सकते हैं और दूसरों के द्वारा दिए गए उत्तरों को सुन सकते हैं; बताएँ कि स की टोपी का रंग क्या है?

(संकेतः टोपियों के सभी संभव वितरणों की गणना करें)

12 अवधारणा प्राप्ति का मॉडल

अरुण नाईक



इन दिनों शिक्षण के ऐसे तरीकों पर, जो गणित में विद्यार्थियों की उपलब्धि, आत्मविश्वास और सक्रिय लगाव पर सकारात्मक प्रभाव डालते हैं, कई विवेचनात्मक दृष्टियाँ उभर कर सामने आ रही हैं। वे अध्यापन प्रक्रिया को सीखनेवाले पर केन्द्रित करती हैं। वे शिक्षकों को सीखनेवाले का विषयवस्तु से परिचय ऐसे तरीकों से करवाने के लिए प्रोत्साहित करती हैं जो संज्ञानात्मक क्षमता को बढ़ाने में सहायक होते हैं।

> *"अवधारणा प्राप्ति की पद्धति में किसी छात्र को अवधारणा की विशेषताओं वाले उदाहरणों से उन विशेषताओं से रहित उदाहरणों में भेद करके, उनकी तुलना करते हुए एक अन्य व्यक्ति (शिक्षक) के दिमाग में पहले से बनी हुई श्रेणी की विशेषताओं का पता लगाना होता है।"*

अवधारणा प्राप्ति एक ऐसी शैक्षणिक रणनीति है जो एक चरणबद्ध खोज प्रक्रिया का उपयोग करती है। यह जेरोम ब्रूनर के कार्य पर आधारित है। अवधारणा प्राप्ति की प्रक्रिया में विद्यार्थी, शिक्षक द्वारा पहले से ही निर्मित कर ली गई श्रेणी या समूह की विशेषताओं का पता लगाते हैं। ऐसा करने के लिए विद्यार्थी अवधारणा की विशेषताओं को दर्शानेवाले उदाहरणों की तुलना, अन्तरों पर गौर करते हुए, ऐसे उदाहरणों से करते हैं जिनमें वे विशेषताएँ या गुण नहीं होते। इस तरह छात्र उदाहरणों को दो समूहों में बाँट देते हैं। अतः अवधारणा प्राप्ति "ऐसी विशेषताओं की खोज करना और उन्हें पहचानना है जिनका उपयोग किसी दी गई श्रेणी या समूह के उदाहरणों को गैर–उदाहरणों से अलग करने में किया जा सकता है।"

अवधारणा प्राप्ति की पद्धति में किसी छात्र को अवधारणा की विशेषताओं वाले उदाहरणों से उन विशेषताओं से रहित उदाहरणों में भेद करके, उनकी तुलना करते हुए एक अन्य व्यक्ति (शिक्षक) के दिमाग में पहले से बनी हुई श्रेणी की विशेषताओं का पता लगाना होता है।

इससे पहले कि हम आगे बढ़ें यह समझना लाभदायक होगा – कि अवधारणा क्या है? "अवधारणा साझा विशेषताओं वाले उद्दीप्कों की श्रेणी है।" किसी अवधारणा के सीखने का मतलब होता है उन साझा गुणों को सफलतापूर्वक पहचानना जो उसे एक श्रेणी के रूप में परिभाषित करते हैं। इसके विपरीत हमारे स्कूलों में अवधारणाओं को अधिकतर, बहुत हुआ तो उपयुक्त उदाहरणों के साथ, परिभाषा के रूप में समझा दिया जाता है। छात्रों को वे अवधारणाएँ रटवा दी जाती हैं। छात्रों को कभी इस बात का बोध नहीं हो पाता कि कोई अवधारणा किन–किन विशेषताओं से मिल कर बनी है; ऐसी समझ से वे अनजान ही रहते हैं। छात्रों को स्वयं कुछ विशेषताएँ खोजकर उन पर आधारित अपनी खुद की अवधारणाओं को निर्मित करने का अवसर कभी नहीं मिलता।

अवधारणा प्राप्ति का मॉडल (कॉसैप्ट अटेनमैंट मॉडल – कैम) इस मुद्दे को सामने लाने की कोशिश करता है और छात्र के लिए किसी अवधारणा की विशेषताओं को ढूँढने का पर्याप्त अवसर प्रदान करता है। वह छात्रों में सक्रिय लगाव पैदा करके, उन्हें चित्रों, शब्दों के कार्ड या नमूनों आदि के उदाहरणों का उपयोग करते हुए अवधारणा को निर्मित करने के लिए प्रोत्साहित करता है। यह मॉडल यह भी सुनिश्चित करता है कि शिक्षक छात्र के पहले सीखे हुए ज्ञान के आगे से शुरू करें। इस तरीके में छात्र किसी प्रमुख शब्द को सिर्फ एक परिभाषा के साथ जोड़ने से कहीं आगे जाता है। इस प्रकार अवधारणा ज्यादा अच्छे ढंग से सीखी जाती है और उसे याद रखने की क्षमता भी बढ़ती है। गणित के अध्यापन में इस तरीके को प्रभावशाली ढंग से इस्तेमाल किया जा सकता है, क्योंकि गणित के अध्ययन में कई अवधारणाओं का अध्ययन शामिल रहता है।

इस मॉडल को कक्षा में प्रभावशाली तरीके से उपयोग करने में निम्नलिखित चरण हमारी मदद करते हैं:

1. एक अवधारणा का चयन करें और उसकी विशेषताओं का विश्लेषण करें।
2. प्रत्येक विशेषता के लिए उदाहरणों और गैर–उदाहरणों को विकसित करें।
3. छात्रों का इस प्रक्रिया से परिचय करवाएँ।
4. उदाहरणों को क्रमिक ढंग से एक के बाद एक पेश करें।

5. छात्रों को अपनी परिकल्पना बनाने दें, और उन्हें खुद ही अपनी परिकल्पना को प्रमाणित करने दें।
6. अवधारणा की परिभाषा विकसित करें।
7. उन्हें अतिरिक्त उदाहरण देने के लिए कहें।
8. कक्षा के साथ प्रक्रिया पर चर्चा करें।
9. गतिविधि का मूल्यांकन करें।

यहाँ पर एक उदाहरण पेश है कि किस तरह से वास्तव में यह कक्षा में घटित होता है।

1. शिक्षक एक अवधारणा का चुनाव करता है जिसे विकसित किया जाना है। उदाहरण के लिए, अभाज्य संख्याएँ (प्राइम नम्बर्स)।
2. शिक्षक उनकी साझा विशेषता को पहचानता है और उसे परिभाषित करता है – ऐसी संख्याएँ जो केवल स्वयं से और 1 से विभाजित होती हैं।
3. शिक्षक अवधारणा के लिए उदाहरण और गैर–उदाहरण को विकसित करता है, और उन्हें फ्लैश कार्ड पर लिखता है। उदाहरण 2, 3, 7, 11 आदि। गैर उदाहरण 4, 6, 12, 25, 9 , 15 आदि।
4. उदाहरणों और गैर–उदाहरणों को लिखने के लिए एक जगह बताता है या एक चार्ट पेपर का इस्तेमाल करता है जिस पर 'हाँ' और 'नहीं' के दो खाने बने हों।
5. शिक्षक छात्रों को निर्देशित करता है, ''मेरे दिमाग में एक अवधारणा है। मैं अवधारणा के उदाहरणों और गैर–उदाहरणों को एक के बाद एक बताऊँगा। उदाहरणों को 'हाँ' और गैर– उदाहरणों को 'नहीं' वाले खाने के नीचे लिखा जाता है। 'हाँ' वाले खाने के नीचे लिखे उदाहरणों को देखें और अपने समूह के बीच चर्चा करें कि उनमें क्या समान है। आपको उस अवधारणा का पता लगाना है जो मेरे दिमाग में है।'' यह पहेली जैसी गतिविधि छात्रों के लिए जल्दी ही एक खोजी खेल के रूप में परिवर्तित हो जाती है।
6. शिक्षक पहला कार्ड यह कहते हुए सामने रखता है कि ''यह हाँ है'' इसे हाँ वाले खाने के नीचे रखो। उदाहरण के लिए 2
7. शिक्षक फिर अगला कार्ड रखता है और कहता है कि ''यह नहीं है''। इसे नहीं वाले खाने के नीचे रखो। उदाहरण के लिए 9
8. इसी प्रकार और दो उदाहरणों और गैर–उदाहरणों को सामने रखकर, प्रत्येक बार शिक्षक द्वारा एक उदाहरण और एक गैर–उदाहरण प्रस्तुत किया जाता है।
9. छात्र एक ही समूह में उपस्थित उदाहरणों की आपस में, और फिर अलग–अलग समूहों में उपस्थित उदाहरणों को आमने–सामने रख कर, उनकी तुलना करके उस तर्काधार को निर्धारित करने का प्रयास करते हैं जो वर्गीकरण के लिए इस्तेमाल किया गया था। जब छात्र उन्हें आमने–सामने रख कर उनकी तुलना कर रहे होते हैं तो वे अपने छोटे–छोटे समूहों में आपस में चर्चा करके अलग–अलग परिकल्पनाएँ विकसित करेंगे।
10. शिक्षक छात्रों से अपने अनुमानों को सबके सामने रखने को कहता है। (आपको इस तरह के जवाब मिल सकते हैं – सम संख्याएँ, दो के गुणज आदि) शिक्षक उनके जवाबों को स्वीकार कर लेता है और इस समय उन पर कोई टिप्पणी नहीं देता।
11. शिक्षक अब अगला उदाहरण और गैर–उदाहरण पेश करता है, क्रमशः 3 और 9 । यह छात्रों को उदाहरणों के और आगे परीक्षण करके अपनी परिकल्पनाओं को जाँचने का अवसर प्रदान करेगा।
12. कुछ और उदाहरण पेश किए जाते हैं और छात्रों से अनुमान लगाने को कहा जाता है। शिक्षक कोई संकेत नहीं देता, वह तो केवल अधिक से अधिक उदाहरण देता है जब तक कि छात्र अवधारणा की विशेषता को पहचान नहीं लेते।
13. एक बार जब छात्र अवधारणा की सभी विशेषताओं को पहचान लेते हैं तो फिर वे अवधारणा को परिभाषित करने की स्थिति में होते हैं। शिक्षक उन्हें उस अवधारणा को बोलकर पूरी कक्षा के सामने रखने के लिए कहता है। (छात्र इस प्रकार से उत्तर दे सकते हैं – आपके दिमाग में जो संख्या है वह अन्य संख्याओं से विभाजित नहीं होती।)
14. इसके बाद शिक्षक उनसे और सवाल पूछ कर उन्हें सही परिभाषा पर पहुँचने में और अवधारणा को उचित नाम देने में उनकी मदद कर सकता है।
15. शिक्षक छात्रों को अवधारणा के लिए उदाहरणों के कुछ और समूह खोज निकालने के लिए कहता है।
16. एक बार जब यह हो जाता है, तो शिक्षक छात्रों से उनके द्वारा अनुसरण की गई चिन्तन प्रक्रिया के बारे में सवाल करता है। उनके द्वारा रची गई परिकल्पना क्या थी? उसके पीछे क्या तर्काधार था? वे कौन सी परिकल्पनाएँ थीं जिन्हें उन्होंने असंगत मानकर निरस्त किया और क्यों?
17. अब छात्रों के द्वारा अवधारणा प्राप्ति का मूल्यांकन करें। इसके लिए शिक्षक उन्हें संख्याओं के एक दिए गए समूह को अभाज्य संख्याओं (प्राइम नम्बर्स) और भाज्य संख्याओं (नॉन प्राइम नम्बर्स) में वर्गीत करने के लिए कह सकता है।

कैम को और ठीक समझने के लिए यहाँ कुछ सूत्र दिए जा रहे हैं:

1. प्रारम्भिक चरण में पेश किए गए उदाहरण और गैर–उदाहरण इस प्रकार के होने चाहिए कि वे कई अलग–अलग परिकल्पनाओं तक ले जा सकें। इससे छात्रों को बाद के चरण में प्रस्तुत किए गए उदाहरणों को सामने रखते हुए अपनी प्रारम्भिक परिकल्पनाओं को जाँचने का

और असंगत परिकल्पनाओं को खारिज करने का अवसर मिलेगा।

2. ऊपर दी गई बात को ध्यान में रखते हुए इन उदाहरणों को क्रमबद्ध ढंग से पेश करना बेहद महत्वपूर्ण है।
3. उदाहरणों को पॉवर प्वाइंट, ओएचपी या फ्लैश कार्ड का इस्तेमाल करके या ब्लैकबोर्ड पर लिख कर प्रस्तुत किया जा सकता है।
4. शिक्षक द्वारा दिए गए उदाहरणों पर छात्र या तो अकेले–अकेले या समूहों में काम कर सकते हैं। कैम अकेले एक व्यक्ति की गतिविधि भी हो सकती है और छोटे–छोटे समूहों में भी की जा सकती है।
5. महत्वपूर्ण बात यह है कि छात्र अवधारणा की विशेषताओं की पहचान करें, न कि सिर्फ उसके नाम की।
6. प्रारम्भिक चरण में छात्रों द्वारा लगाए गए अनुमानों पर 'हाँ/नहीं' कह कर न तो जवाब दें, और न ही उन्हें निरूत्साहित करें। उन्हें उनकी खुद की अवधारणा विकसित करने दें, और बाद के चरण में प्रस्तुत किए गए उदाहरणों के आधार पर गलत अवधारणाओँ को खारिज करने दें।
7. यदि कोई अवधारणा कुछ उप–अवधारणाओँ के द्वारा परिभाषित होती है (उदाहरण के लिए–पॉलीगन को इन शब्दों में परिभाषित किया जाता है – समतलीय आति, बन्द आति, कई भुजा वाली आति आदि) तो इस तरह के मॉडल को इस्तेमाल करना बहुत परेशानी भरा साबित हो सकता है। उसे किसी मार्गदर्शक खोज के साथ जोड़ना अच्छा रहता है।
8. जब छात्र काम में संलग्न हों तो शिक्षक को कक्षा में भ्रमण करते रहना चाहिए। इस दौरान शिक्षक छोटी–छोटी बातों पर गौर करके उनका लेखाजोखा बना सकता है, या छात्रों की गतिविधियों के सभी चरणों के किए जाने की जाँच सूची तैयार कर सकता है।
9. छात्रों को पर्याप्त समय दें, ताकि वे प्रत्येक श्रेणी के लिए परिभाषा विकसित कर सकें? परिकल्पना निर्मित कर सकें।
10. शिक्षक उदाहरणों को हाँ या नहीं के रूप में नामांकित कर सकता है।

निष्कर्ष

अध्यापन की पारम्परिक विधियों की तुलना में अवधारणा प्राप्ति के मॉडल के कई लाभ हैं। यह छात्रों में जानकारी के विश्लेषण और उपयोग करने की कला को विकसित करता है। छात्रों की विश्लेषण के आधार पर विचार करने की क्षमता बेहतर बनती है, और इससे उनकी विवेचनात्मक सोच भी पैनी होती है क्योंकि उन्हें अपनी विचार प्रक्रिया का वर्णन करना होता है। इसके अलावा छात्र अधिक स्पष्टतापूर्वक (अपनी विचार प्रक्रिया का) वर्णन कर पाते हैं। यदि इस मॉडल का विवेकपूर्वक इस्तेमाल किया जाए तो यह छात्रों को आनन्दपूर्वक तथा अधिक स्पष्टता के साथ गणित सीखने में मदद कर सकता है।

अरुण नाईक *अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन में अकादमिक और पैडागॉजी समूह में स्पेशलिस्ट के रूप में कार्यरत हैं। वे पिछले 8 वर्षों से शिक्षकों के साथ काम कर रहे हैं। उन्होंने शिक्षकों के प्रशिक्षण के लिए आयोजित कई कार्यशालाओं का संचालन किया है। उनसे* arun@azimpremjifoundation.org *पर सम्पर्क किया जा सकता है ।*

13 गणित के अध्यापन में संवादः वास्तविकताएँ और चुनौतियाँ

एकता शर्मा



समस्या को समझना

डेविड व्हीलर ने कहा था, ''**ढेर सारा गणित जानने की अपेक्षा यह जानना अधिक उपयोगी है कि गणितीकरण किस प्रकार किया जाता है।**'' शायद यह संक्षिप्त कथन गणित की सिखाने–सीखने की सारी समस्या को सारगर्भित रूप से बयान कर देता है। बहुत सारा गणित जानने का मतलब है कि एक पहले से निर्धारित विधि सीखकर उसके अनुसार विभिन्न प्रकार की संगणनाएँ करने में समर्थ होना। दूसरी ओर, गणितीकरण में परिस्थिति की जरूरत के अनुसार गणित को प्रयोग में लाने की योग्यता शामिल होती है – यानी गणितीय रूप से सोचने की क्षमता। गणित के विवरणात्मक प्रश्नों में इस प्रकार का गणितीकरण करने का अवसर मिल सकता है। आइए हम इस मुद्दे की तहों को खोलने का प्रयास करें, और यह देखें कि गणित में परस्पर क्रियात्मक व्यवहार और संवाद के लिए कितना अवसर है, तथा इस अवसर का किस हद तक सिखाने–सीखने में उपयोग किया जाता है।

इबारती सवाल – ''सीमा कुछ रुपये लेकर बाज़ार गई। उसने फल खरीदने में 150 रुपये खर्च कर दिए। अब उसके पास 100 रुपये बचे। बताओ कि वह कितने रुपये लेकर बाज़ार गई थी?''

अक्सर जब इस प्रकार के इबारती सवाल बच्चों को दिए जाते हैं तो वे भ्रमित हो जाते हैं कि उसे हल करने के लिए किस गणितीय क्रिया का इस्तेमाल करना चाहिए। अतः यदि हम यह समझें कि कौन–सी चीजें बच्चों को भ्रमित कर सकती हैं, तो हम उन चुनौतियों को स्पष्ट देख सकेंगे जिनका बच्चों को विवरणात्मक प्रश्न हल करने में सामना करना पड़ सकता है।

> *''इस बात को पहचाने जाने की ज़रूरत है कि गणित स्वयं अपने आप में एक भाषा है जिसके अपने खास संकेतसमूह होते हैं, और किसी भी अन्य भाषा की तरह उसे, सिर्फ उसके संकेतों का कूटानुवाद करने के बजाय, अर्थपूर्ण बनाया जाना चाहिए।''*

कभी–कभी हम देखते हैं कि बच्चे कुछ वाक्यांशों, जैसे ''सब मिलाकर कितने/कितना'' या ''कितना/कितने बचे'' को यह तय करने के लिए इशारों की तरह समझते हैं कि उन्हें किस विधि का इस्तेमाल करना पड़ेगा – जैसे योग, घटाना आदि। अब जैसे ऊपर दिए गए प्रश्न में साफ तौर पर ऐसे शब्दों का इस्तेमाल किया गया है जो बच्चों को घटाने की ओर ले जा सकते हैं।

शब्दों के चुनाव के अलावा, ऐसे प्रश्न का सन्दर्भ और पृष्ठभूमि भी बच्चों के लिए अगली बड़ी चुनौती होती है। कभी–कभी जब सन्दर्भ बच्चे के लिए अप्रासंगिक होता है तो इसके कारण विवरणात्मक प्रश्न को हल करने का सारा मजा चला जाता है, और वह सारे अभ्यास को मशीनी बना देता है।

यहाँ एक दूसरा उदाहरण हैः ''कक्षा 3 की गणित की पाठ्यपुस्तक में 86 पेज हैं और कक्षा 3 की हिन्दी की पाठ्यपुस्तक में 75 पृष्ठ हैं। दोनों पाठ्यपुस्तकों को मिला कर कुल कितने पृष्ठ हुए?''

कोई भी समझदार या विवेकशील व्यक्ति क्यों यह जानना चाहेगा कि दोनों पाठ्यपुस्तकों को मिला कर उनमें कुल कितने पृष्ठ हुए। इसके बजाय यदि प्रश्न को अधिक वास्तविक सन्दर्भ दिया जाए तो यह बच्चों का ध्यान आकर्षित कर सकता है, और फिर वे उसे अर्थपूर्ण मानकर हल करने की कोशिश करेंगे। यहाँ एक दूसरा उदाहरण है – ''दीपा को अपने प्रतिदिन के खर्चों को दर्ज करने की आदत है। आज उसने फलों पर 86 रुपये और सब्जियों पर 75 रुपये खर्च किए। आप यह गणना करने में उसकी मदद करें कि आज दीपा ने कितना पैसा खर्च किया''?

ऊपर दिए गए उदाहरण के 'भाषायी' विवरण को बहुत थोड़ा–सा बढ़ा देने पर प्रश्न की परिस्थिति की पूरी तस्वीर रूपान्तरित होकर अधिक सार्थक अभ्यास में बदल जाती है। जीवन से जुड़े स्पष्ट शब्दों में व्यक्त, इस तरह के भाषायी विवरण वाले सवालों से, गणित को प्राथमिक स्तर पर जिस तरह देखा जाता है, सिखाया जाता है और सीखा जाता है, उसे काफी हद तक बदला जा सकेगा।

शाब्दिक सवालों को हल करते समय, शिक्षा का भाषायी माध्यम और जिस सन्दर्भ में सवाल को जमाया गया है, शायद ऐसी प्राथमिक चुनौतियाँ हैं जिनका बच्चे सामना करते हैं। हालाँकि अन्य मुद्दे भी हैं। वे बच्चे जो भाषा से काफी अच्छे से परिचित होते हैं, कई बार उन्हें भी इस तरह के प्रश्नों को हल करने में संघर्ष करना पड़ता है। यह स्पष्ट बताता है कि गणित की 'समस्या' की जड़ें शिक्षा के माध्यम की कठिनाई से कहीं ज्यादा गहरी हैं।

आइए इस मुद्दे को स्पष्ट करने के लिए हम सरल विधियों पर आधारित सवालों के कुछ उदाहरण लें।

(पहला उदाहरण)	(दूसरा उदाहरण)	(तीसरा उदाहरण)
24 +32 ——— ———	24+32 =............	24 और 32 जोड़ने पर होता है

जहाँ पहले दो सवाल शुद्ध गणितीय संकेतों में दर्शाए गए हैं, वहीं तीसरा प्रश्न पहले और दूसरे, दोनों सवालों की शाब्दिक अभिव्यक्ति है।

उदाहरण 1 उस सबसे ज्यादा प्रचलित स्वरूप को दर्शाता है जिसमें जोड़ के सवाल देश भर में छात्रों के सामने लाए जाते हैं। उदाहरण 2 में जिसमें एक नए संकेत, अर्थात ''बराबर'' है, को शामिल करने से स्वरूप में थोड़ा परिवर्तन हुआ है, लेकिन जबानी पढ़ने पर वह (उदाहरण 1 की तुलना में) इस प्रश्न को गणितीय शब्दावली में ज्यादा सटीक ढंग से बताता है– ''चौबीस धन बत्तीस बराबर....''। ऐसा देखा गया है कि जो बच्चे उदाहरण 1 में दिए गए जोड़ के स्वरूप से तो खासे परिचित होते हैं, लेकिन जिन्हें उदाहरण 2 का बहुत कम ज्ञान होता है या बिल्कुल नहीं होता, वे या तो यह समझ ही नहीं पाते कि उदाहरण 2 को किस तरह से हल करें, या वे जोड़ने की प्रक्रिया में घालमेल कर देते हैं, जैसे इकाई अंक को दहाई के अंक में जोड़ देना आदि।

यह दर्शाता है कि समस्या पूरी तरह से उस भाषायी माध्यम की नहीं है जिसमें प्रश्न पूछा जाता है। सवालों को शुद्ध गणितीय ढंग से व्यक्त करने के मामले में भी, यदि उनके स्वरूप को थोड़ा–सा ही बदलकर पेश किया जाए, तो बच्चों को समझने में कठिनाई होती है।

उदाहरण 3 एक अलग प्रकार की स्थिति है। यहाँ इस्तेमाल की गई भाषा वह भाषा नहीं है जिसका हम अपने रोजमर्रा के जीवन में आमतौर पर उपयोग करते हैं। इसमें भी, उदाहरण 1 और उदाहरण 2 की ही तरह, कुछ अमूर्तिकरण शामिल रहता है, लेकिन इसके साथ ही यह इस प्रश्न को हल करने में इस्तेमाल की जाने वाली क्रिया विधि को भी साफ–साफ बताता है। इसमें गणितीय शब्दावली का इस्तेमाल करके लिखी जाने वाली कोई गणितीय उक्ति शामिल रहती है, उदाहरण के लिए ''जोड़ने पर होता है'', या कभी–कभी ''2 और 2 मिल कर 4 होते हैं''। इस तरह की शब्दावली उस भाषा का अंग नहीं बनती जिसे माध्यम के रूप में इस्तेमाल किया जाता है, जो इस मामले में हिन्दी है। ये गणितीय शब्दावली होती है, और कई बार हम इस महत्वपूर्ण तथ्य को नजरअन्दाज कर देते हैं। ये शब्द गणितीय भाषा की एक प्रकार की शाब्दिक अभिव्यक्ति होते हैं। यदि बच्चों को इन पदों और मुहावरों के बारे में यह नहीं समझाया जाता कि ये गणितीय रूप से बातचीत करने के तरीके का हिस्सा हैं, तो जिन प्रश्नों में इन्हें इस्तेमाल करना शामिल रहता है वे बच्चों के लिए अधिक भ्रमित करने वाले होते हैं।

इस बात को पहचाने जाने की जरूरत है कि गणित स्वयं अपने आप में एक भाषा है जिसके अपने खास संकेत समूह होते हैं। किसी भी अन्य भाषा की तरह गणित को, सिर्फ उसके संकेतों का कूटानुवाद करने के बजाय, अर्थपूर्ण बनाया जाना चाहिए। केवल संकेतों और विधियों को जानने से भी संगणना में निश्चित रूप से मदद मिलेगी। लेकिन यह बच्चों को गणितीय रूप से सोचने में तब तक मदद नहीं करेगा जब तक कि उन्हें इनका मतलब समझने के अवसर प्रदान नहीं किए जाते।

मुख्य मुद्दे

बच्चों को इबारती सवालों को हल करना इतना कठिन क्यों लगता है? एनसीईएफ 2005, शिक्षण में अर्थ के केन्द्रीय महत्व का बहुत जोर देकर उल्लेख करता है। वह बहुत साफ शब्दों में यह तर्क देता है कि ऐसी शिक्षा, जिसकी प्रकृति अपेक्षाकृत स्थायी प्रकार की होती है, की एक जरूरी पूर्वशर्त होती हैः उसे अर्थपूर्ण बनाना।

यह कह चुकने के बाद, आइए हम इसका परीक्षण करें कि गणित का बच्चों से जिस तरीके से परिचय कराया जाता है और उन्हें पढ़ाया जाता है, वह इस शर्त को पूरी करता है या नहीं। सरकारी प्राथमिक स्कूलों में उपयोग की जानी वाली पाठ्यपुस्तकों से कुछ उदाहरण लेने पर हमने देखा कि उनमें:

1. गणित सीखने से पूर्व–अवस्था की अवधारणाओं, जैसे बड़ा–छोटा, नियमित संरचनाओं को पहचानना, समानताओं और अनुरूपताओं को पहचानना आदि, को पर्याप्त स्थान नहीं मिलता।
2. जहाँ उन्हें स्थान मिलता भी है, तो संख्याओं को समझने में उनका ठीक से इस्तेमाल नहीं होता।
3. संख्याओं और उनके समतुल्य शब्दों, उदाहरण के लिए '3' और 'तीन', दोनों का एक साथ परिचय करवाया जाता है। जबकि बच्चे न तो अंकों से ठीक से परिचित हुए होते हैं और न भाषा से।
4. रोजमर्रा के जीवन के साथ सम्बन्ध बहुत मजबूत और उपयुक्त नहीं होते।
5. पाठ्यपुस्तकों में अभ्यास के लिए अवसर बहुत हद तक घट गया है क्योंकि अवधारणा के परिचय के लिए अधिक स्थान

दिया गया है। एक ओर जहाँ यह अच्छी बात है कि इस तरह अवधारणात्मक समझ पर ध्यान केंद्रित करने की कोशिश की गई है, वहीं दूसरी ओर अभ्यास की वैकल्पिक सामग्री, जैसे कार्य पुस्तिका आदि, की कमी की वजह से यह बच्चों के सीखने पर प्रतिकूल प्रभाव डालता है। यहाँ पर मैं यह सलाह दूँगी कि गणित को सीखने में अभ्यास का भी स्थान है। अवधारणात्मक समझ के साथ प्रश्नों को हल करने का अभ्यास, गणित जैसे विषय को सीखने के लिए वाकई बहुत जरूरी होता है, क्योंकि गणित सीखने का पूरा प्रयोजन ही सोचने और तर्क करने का एक खास तरीका विकसित करना है। इसके लिए निश्चित तौर पर अभ्यास की जरूरत होती है।

इस वास्तविकता को देखते हुए कि पाठ्यपुस्तकें लगभग पूरी तरह से पढ़ाने – सीखने की प्रक्रिया का मार्गदर्शन करती हैं, यह कहना तर्कसंगत होगा कि गणित के अध्यापन में भी उपरोक्त बिन्दुओं का प्रभाव दिखाई देता है।

इसके अतिरिक्त, इस तथ्य पर गौर करें कि गणित की अभिकलन विधियों (अल्गोरिद्म) पर आधारित प्रश्नों (जैसे कि उदाहरण 1–पीछे के पृष्ठ पर दर्शाए गए), में बच्चों का प्रदर्शन विवरणात्मक प्रश्नों की तुलना में, प्रश्न के थोड़े बदले स्वरूप (उदाहरण 2) में उनके प्रदर्शन से बेहतर होता है। यह देखना आसान है कि इस परेशानी की जड़ें एक विषय के रूप में गणित की प्रकृति की समझ के अभाव में स्थित हैं। इसमें जो मुख्य मुद्दा प्रतीत होता है वह सही उत्तर पर पहुँचने के लिए एक नियत प्रक्रिया का अनुसरण करने पर अनावश्यक, बल्कि अनुचित जोर दिया जाना। इस बात पर जोर नहीं दिया जाता कि, चाहे प्रश्न सरल अभिकलन गणित पर ही क्यों न आधारित हो, बच्चे उस प्रश्न के साथ उलझें। प्रश्न को हल करने के अलग–अलग तरीकों को पहचानें तथा इस्तेमाल की गई विधि और उसके पीछे के कारणों/तर्कों को शाब्दिक रूप में बताएँ।

आगे की राह

सीधे कहें तो, जैसे किसी भाषा को सीखने के लिए उसे उपयुक्त सन्दर्भ दिया जाना जरूरी होता है उसी प्रकार जब प्राथमिक स्तर पर गणित से परिचय कराया जाता है तो उसे भी परिचित सन्दर्भ में रखना जरूरी है। सीखने– सिखाने की प्रक्रिया इस तरह से रची जाना चाहिए कि वह वास्तविक जीवन से जुड़ी परिस्थितियों वाले प्रश्न प्रस्तुत करे। बच्चों को सिर्फ सही उत्तर पर पहुँचने के लिए कहने के बजाय, कई सम्भव हल ढूँढने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। ऐसा करने के लिए, विवरणात्मक प्रश्नों को इस प्रकार से दिया जाना चाहिए कि उनमें शिक्षक और छात्रों के बीच संवाद के लिए गुंजाइश रहे। उदाहरण के लिए बच्चों से सीधा–सीधा जोड़ करने के लिए कहने के बजाय, उनसे दी गई संख्याओं को जोड़ने के तीन अलग–अलग तरीके ढूँढने के लिए कहें; या ऐसा भी कर सकते हैं कि उत्तर पहले दे दें, और उनसे उन उत्तरों के लिए प्रश्न बनाने को कहें।

बच्चों के लिए गणित को सीखने का और अधिक अर्थपूर्ण अनुभव बनाने के लिए उसमें इस प्रकार के संवाद और पारस्परिक गतिविधियाँ लाने की जरूरत है।

यह एक बड़ी चुनौती है क्योंकि सीखने की स्थितियों में गणित को सीखनेवालों में भेद करने वाले एक औजार की तरह से इस्तेमाल किया जाता है। उसने ज्यादातर विद्यार्थियों में डर और आशंका पैदा की है। यहाँ तक कि युवा विद्यार्थियों को घातक कदम उठाने पर भी मजबूर किया है। शिक्षक भी ऐसा महसूस करते हैं कि कुछ विद्यार्थी गणित द्वारा प्रस्तुत की गई चुनौती का सामना करने में सक्षम नहीं होते। यह भी एक आम मिथक (धारणा) है कि लड़कियाँ गणित में उतनी उत्सुक नहीं होतीं जितने लड़के होते हैं।

ये धारणाएँ बेबुनियाद और निराधार हैं। हम सभी के लिए यह जानना महत्वपूर्ण है कि, **''हर बच्चा गणित सीख सकता है और सभी बच्चों को गणित सीखने की जरूरत होती है।''**

जरूरत है तो इस विषय को इस ढंग से पढ़ाने की जो इसमें विद्यार्थियों की रुचि जगाए। वह ढंग जो उन्हें सिर्फ भ्रमित करने के बजाय इसमें उपयोगी अर्थ निकालने की गुंजाइश दे। यहाँ ब्रूनर द्वारा कही गई बात को याद करना सार्थक होगा, **''किसी भी बच्चे को विकास के किसी भी चरण में कोई भी विषय किसी बौद्धिक रूप से ईमानदार स्वरूप में कारगर ढंग से सिखाया जा सकता है।''** यह बात उन्होंने सीखी जा रही विषयवस्तु की उपादेयता के बारे में कही थी। मुझे विश्वास है कि गणित भी इसका अपवाद नहीं है!

एकता शर्मा *वर्तमान में अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन के उत्तराखण्ड दल में अकादमिक और पैडागॉजी समन्वयक के रूप में कार्य कर रही हैं। वे जून 2005 में फाउण्डेशन से जुड़ीं। उन्होंने शिक्षा में स्नातकोत्तर उपाधि ली है। वे इससे पहले दिल्ली विश्वविद्यालय के सेंट्रल इंस्टीट्यूट ऑफ एजुकेशन में काम करती थीं। उनसे* ekta@azimpremjifoundation.org *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

14 प्राथमिक स्कूल में गणित सीखने में मूर्त अनुभवों की भूमिका

मीना सुरेश



स्कूलों में गणित शिक्षण के पारम्परिक तरीकों में तकरीबन एक शताब्दी में भी कोई बड़ा परिवर्तन नहीं हुआ है, यह तब जब कि दूसरी चीजों जैसे हमारी संस्कृति, आस्थाओं और जीवन के ढंग में बहुत बड़ा बदलाव हो चुका है। आज भी, स्कूलों में गणित की पढ़ाई कठोर नीरस अभ्यास का ही दूसरा नाम है। स्कूलों में हो रहे अध्यापन में, विशेषकर प्राथमिक कक्षाओं में, सघन, केन्द्रित ध्यान का अभाव दिखाई देता है। शिक्षकों के लिए गणित ज्यादातर एक भ्रमित करनेवाला विषय रहा है क्योंकि वे स्वयं नहीं जानते कि वास्तव में गणित है क्या, वे इस विषय से सम्बन्धित शैक्षणिक मुद्दों के बारे में निश्चिन्ततापूर्वक अनजान रहते हैं। इसके बारे में समझ न होने से, इसे पढ़ाने के लिए शिक्षकों की तैयारी ठीक नहीं होती, जिसके फलस्वरूप भ्रम का यह सिलसिला चलता रहता है, और उनके छात्र भी अपने पूरे स्कूली दौर में गणित को लेकर भ्रमित बने रहते हैं। विडम्बना यह है कि स्कूल के गणित में उच्च अंक प्राप्त करने वाले छात्र भी कॉलेज स्तर के गणित के लिए तैयार नहीं होते हैं। कुकुरमुत्तों की तरह उगते ट्यूशन सेन्टर इस बात का प्रमाण हैं। समझ की यह कमी जीवन को गहराई तक प्रभावित करती है, खासतौर से उन कामों में जिन्हें लोगों को एक आम आदमी की तरह करना होता है, जैसे प्रतिशत का हिसाब लगाना या फिर करों की गणना करना। इससे यह बहस शुरू होती है कि क्या परीक्षाओं का गणित गणितीय समझ का सही सूचक होता है?

एनसीटीएम (नेशनल कौंसिल ऑफ टीचर्स ऑफ मैथेमेटिक्स) ने गणित सीखने के मानक स्तर के रूप में दो श्रेणियों की पहचान की है। ये स्तर हैं (अ) गणितीय सोच का स्तर (ब) गणितीय विषयवस्तु का स्तर। 'गणितीय सोच' के स्तर में गणित की चिन्तन प्रक्रिया की प्रकृति पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है, जैसे सवालों को हल करना, विचारों का सम्प्रेषण करना, तर्क करना और तथ्यों में सम्बन्ध स्थापित करना। 'गणितीय विषयवस्तु' के मानक स्तर में गणित के खास विषयाँश (टॉपिक्स), जैसे संख्या ज्ञान, अनुमानन, ज्यामिति, मापन, सांख्यिकी, प्रायिकता (सम्भाव्यता), भिन्न संख्याएँ, नियमित संरचनाएँ और सम्बन्ध इत्यादि शामिल रहते हैं। एक ओर जहाँ गणित की विषयवस्तु बहुत महत्वपूर्ण है, वहीं 'गणितीय सोच' के क्षेत्रों को विषयवस्तु में पिरोया जाना भी उतना ही महत्वपूर्ण है। स्कूल में गणित सीखने का पूरा अनुभव सीखने वालों के लिए इस तरह से बुने गए एक ऐसे वस्त्र की तरह होना चाहिए जिस पर छात्र नए विचारों को जानने और गणितीय सोच को विकसित करने के अपने अनुभवों को चित्रित कर सकें। गणितीय कौशलों की प्रकृति प्रायः जुड़ते जाने की होती है, अर्थात पहले सीखे गए कौशल के आधार पर दूसरा कौशल निर्मित होना। उदाहरण के तौर पर बुनियादी अंकगणित की ठीक समझ के बिना बीजगणित की अवधारणाओं को आत्मसात् नहीं किया जा सकता है। इस सच्चाई के कारण, बुनियादी अवधारणाओं के बारे में ठीक समझ न होने का प्रतिकूल प्रभाव छात्रों पर दूर तक पड़ता है और जुड़ता जाता है। यह नितान्त आवश्यक है कि प्राथमिक विद्यालय के छात्रों में बुनियादी अवधारणाओं की स्पष्ट समझ बने और वे शिक्षकों के आदेशानुसार सिर्फ सूत्रों (फार्मूलों) और तथ्यों को ही न रटें।

> *''एक सामान्य कक्षा में, शिक्षक सरकस के रिंगमास्टर की भूमिका में रहता है, जो कक्षा को एक के बाद एक सिलसिलेवार निर्देश देता जाता है जिनमें अन्वेषण के लिए कोई जगह नहीं होती। इस तरह के निर्देश जैसे ''एक लाल कड़ी को लेकर इसे मेज पर रख दो। दो लाल कड़ियाँ लेकर उन्हें जोड़ो और फिर उन्हें पहली एक कड़ी के आगे रख दो ' और ''मैं जैसा कहता हूँ वैसा करो''। जबकि एक संवेदनशील शिक्षक इस तरह के निर्देश, जैसे कि ''लाल कड़ियों का उपयोग करो 'या ''दो कड़ियों को एक के आगे रख दो'' आदि–आदि, न देकर वस्तुओं का बेहतर इस्तेमाल करेगा।''*

अनुभवजन्य सीखने की पद्धति छात्रों को ठोस अनुभव प्रदान करती है, और यह सुनिश्चित करती है कि सीखने की प्रक्रिया में उनकी सक्रिय भूमिका अधिक से अधिक हो। इस ढंग से सीखने की पद्धति में समझ पर और विवेचनात्मक सोच को बढ़ाने पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है, इसलिए इसमें छात्र खुद ही योजना बनाना, उसे कार्यान्वित करना, चर्चा करना, परस्पर संवाद करना और निष्कर्ष पर पहुँचना सीखते हैं। यह सब गणित के बारे में विशेषकर सत्य है क्योंकि यह विषय ही अमूर्त है। छात्रों को अनुभव के आधार पर सीखने का अवसर प्रदान करने का एक

व्यवहारिक तरीका है 'प्रहस्तनीय' वस्तुओं (मैनिपुलेटिव्स) का इस्तेमाल करना। प्रहस्तनीय वस्तुएँ यानी जिन्हें छात्र हाथों से छू सकते हैं और इधर–उधर कर सकते हैं। इनका प्रयोग गणित की किसी विशेष विषयवस्तु से छात्रों का या तो परिचय कराने के लिए या फिर उसे मजबूत बनाने के लिए किया जा सकता है। एक ओर जहाँ इनका उपयोग छात्रों की सक्रिय भागीदारी को सुनिश्चित करेगा, वहीं शिक्षकों की भूमिका होती है ऐसी गतिविधियाँ रचना जो विषयवस्तु को छात्रों तक पहुँचाने में, और साथ ही उन्हें 'गणितीय सोच' के आवश्यक स्तर तक पहुँचने में मदद कर सकें। शोध से पता चला है कि प्रहस्तनीय वस्तुएँ गणित सीखने में विशेष रूप से सहायक होती हैं क्योंकि वे सीखने वाले को मूर्त से अमूर्त स्तर तक पहुँचने में मदद करती हैं। कक्षा की गतिविधियों को सावधानीपूर्वक ऐसा बनाया जाना चाहिए और इस तरह व्यवस्थित किया जाना चाहिए कि वे मूर्त से अमूर्त के बीच एक सेतु का काम करें। इस बात पर ध्यान देना बहुत महत्वपूर्ण है कि सिर्फ ऐसी चीजों के उपयोग से ही वांछित परिणाम तब तक प्राप्त नहीं होगा, जब तक कि इन चीजों का इस्तेमाल करनेवाले अनुभवों की रचना सावधानी से नहीं की जाएगी। इस तरह अब हम उस व्यावहारिक प्रश्न पर पहुँचते हैं कि प्रहस्तनीय सामग्री का क्यों, कब, कहाँ, कैसे और किसके साथ उपयोग किया जाना चाहिए। हालाँकि ऊपर पूछे गए सभी प्रश्नों पर चर्चा करना इस लेख की सीमा से परे है, पर इतना निश्चित तौर पर कहा जा सकता है कि कोई भी शिक्षक स्वयं से ये सभी प्रश्न पूछ सकता है, और उनके उत्तरों को खोज लेना या उन तक पहुँच जाना मुश्किल नहीं है।

हम अनुभवजन्य सीखने के तरीकों की चर्चा कक्षाओं में उनके सबसे प्रभावी ढंग से प्रयोग किए जाने की दृष्टि से करेंगे। प्रहस्तनीय चीजों को उपयोग करने का अनुभव ऐसा होना चाहिए ताकि विद्यार्थी अपने स्वयं के निष्कर्षों पर पहुँचें और गणितीय अन्तर्दृष्टि प्राप्त कर सकें। इसका तौर–तरीका खोजबीन पर आधारित होना चाहिए। शिक्षकों को सिर्फ मार्गदर्शक या सहायक की भूमिका में रहना चाहिए और उन्हें छात्रों को कभी–कभी ऐसे कामों का प्रयास भी करने देना चाहिए जो हास्यास्पद या गैर उत्पादक लगें। इस चर्चा को आगे बढ़ाते हुए, आइए यह देखें कि अमूमन कक्षाओं में क्या होता है।

स्थिति 1: कड़ियों का उपयोग करते हुए संख्याओं के अनुक्रम से छात्रों का परिचय कराना – कड़ियों का बाह्य निरूपण की तरह उपयोग करना

एक सामान्य कक्षा में, शिक्षक सरकस के रिंगमास्टर की भूमिका में रहता है, जो कक्षा को एक के बाद एक सिलसिलेवार निर्देश देता जाता है जिनमें अन्वेषण के लिए कोई जगह नहीं होती। इस तरह के निर्देश जैसे ''एक लाल कड़ी को लेकर इसे मेज पर रख दो। दो लाल कड़ियाँ लेकर उन्हें जोड़ो और फिर उन्हें पहली एक कड़ी के आगे रख दो'' और ''मैं जैसा कहता हूँ वैसा करो''। ऐसे में गतिविधि तो पूरी हो जाती है, और शिक्षक को संतोष हो जाता है कि उसने निर्धारित विषयवस्तु को छात्रों को सिखा दिया है; लेकिन छात्रों के लिए ऐसी गतिविधि एक बेसिर पैर की घटना की तरह होती है, और यह तय ही समझिए कि वे इससे 'गणितीय सोच' की किसी भी विषयवस्तु को आत्मसात नहीं करते।

एक संवेदनशील शिक्षक इस तरह के निर्देश, जैसे कि ''लाल कड़ियों का उपयोग करो'' या ''दो कड़ियों को एक के आगे रख दो'' आदि–आदि, न देकर प्रहस्तनीय वस्तुओं का बेहतर इस्तेमाल करेगा। ऐसा शिक्षक कम से कम निर्देश देगा। वह छात्रों को अपनी पसन्द के रंग या रंगों के जोड़े चुनने की छूट देते हुए अपना ध्यान इस बात पर केन्द्रित करेगा कि वे विभिन्न लम्बाइयों की श्रृंखलाएँ बनाएँ, उन्हें क्रम से जमाएँ और संख्याओं के अनुक्रम को खुद से खोजकर इस तथ्य पर पहुँचें कि 'एक और बढ़ाने से अगली संख्या मिलती है' और इस तरह वह छात्रों को इस अवधारणा को आत्मसात करने का अवसर देता है।

स्थिति 2 : साधारण जोड़ – अभिकलन गणित की विधि को निरूपित करने में गणकों का उपयोग

जब एक शिक्षक जोड़ सिखाने का प्रयास करता है (जैसे 3 + 2 मिलकर 5 हो जाता है) तो छात्र 3 लाल गणक और 2 सफेद गणक उठाते हैं फिर उन सबकी एक साथ गणना कर उत्तर तक पहुँचते हैं। इस गतिविधि में प्रहस्तनीय चीजों (गणकों) का प्रयोग संख्याओं के प्रतीकों की तरह होता है।

ऐसे अनुभव बहुत अच्छी शुरुआत होते हैं; लेकिन, जल्दी ही शिक्षक को अगले स्तर पर जाना चाहिए जहाँ चीजें 'सोचने के तरीकों' के द्वारा गणित के सवालों को हल करने में छात्रों के लिए सन्दर्भ बिन्दु का काम करती हैं। छात्रों को जोड़ क्रिया की ऐसी खूबियों, जैसे क्रमपरिवर्तन की समतुल्यता (कम्यूटेटिव आइडेंटिटी), या योग की समतुल्यता (ऐडीटिव आइडेंटिटी शून्य जोड़ना), को खुद से खोज कर मालूम करना चाहिए। शिक्षकों को सिर्फ मार्गदर्शक की तरह संकेतों और उनसे जुड़े गणितीय विचारों को समझने में छात्रों की मदद करना चाहिए।

स्थिति 3: शाब्दिक सवाल चिन्तन प्रक्रिया के बाह्य प्रतीकों की तरह स्थानिक मान दर्शानेवाली प्रहस्तनीय वस्तुओं का उपयोग

दिया गया शाब्दिक सवालः एक विद्यालय में 156 लड़के और 212 लड़कियाँ हैं। कुल मिला कर कितने छात्र हैं?

इस प्रश्न को हल करने के लिए छात्र स्थानीय मान दर्शाने वाली प्रहस्तनीय वस्तुओं का प्रयोग करते हैं। इनमें इकाई या 1 दर्शाने वाले छोटे वर्गाकार टुकड़े, दहाई या 10 दर्शाने वाली पट्टियाँ और सैकड़ा या 100 दर्शाने वाले बड़े वर्ग – जिनमें दहाई वाली 10 पट्टियों को जोड़कर 100 बनता है – होते हैं। यहाँ, प्रहस्तनीय वस्तुओं का प्रयोग चिन्तन की प्रक्रिया और उसके क्रम के बाहरी प्रतीकों के रूप में किया जाता है। यानी छात्र प्रहस्तनीय वस्तुओं का सिर्फ जोड़ने की क्रिया सम्पन्न करने के लिए ही उपयोग नहीं करते, बल्कि उन्हें अपनी सोचने की प्रक्रिया को बाहर प्रदर्शित करनेवाले प्रतीकों की तरह देखते हैं। इसका मतलब है कि छात्र यह जानते हैं कि उन्हें क्या करना है और सामग्री का प्रयोग वे सिर्फ उत्तर तक पहुँचने के लिए सहारे के रूप में करते हैं। ये अनुभव अच्छे हैं लेकिन इनमें गणितीय अन्तर्दृष्टि की कमी है। गणितीय अन्तर्दृष्टियों को तो स्वयं ही खोजना पड़ता है।

स्थिति 4 : पहाड़े – आड़ी–खड़ी काटती हुई डण्डियों के जाल को अभिकलन विधि के बाह्य प्रतीक की तरह प्रयोग करना

इसमें छात्र 'पहाड़ों के प्रहस्तनीय निरूपण' (आड़ी–खड़ी काटती हुई डण्डियों के जाल से पहाड़े सीखना) का प्रयोग करते हैं। यह प्रयोग एक गतिविधि बनकर ही रह जाता है अगर छात्रों को यह गणितीय विचार समझ में न आ जाए कि गुणन दरअसल उसी संख्या को बार–बार जोड़ने की प्रक्रिया का ही छोटा रूप है, और यह भी कि गुणा करने पर संख्याओं में किस तरह वृद्धि होती है। उदाहरण के लिए मानसिक रूप से यह देख पाना कि 6 X 4 दरअसल 6 + 6 + 6 + 6 है, और यह भी 6 बढ़कर कितना बड़ा हो जाता है। ऐसे अनुभवों में, प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग अवधारणाओं के संरचनात्मक तत्वों को सहारा देने के लिए किया जाता है।

परन्तु, यह फिर एक अधूरा गणितीय दृष्टिकोण है। ऐसे अनुभव जो चर्चाओं और व्याख्याओं को बढ़ावा देकर निष्कर्षों की ओर ले जाते हैं, गणित सीखने की प्रक्रिया को सहारा देने वाले सबसे अच्छे तरीके होते हैं। (टिप्पणीः यहाँ मैं युवा घुमन्तु छात्रों की एक कक्षा के बारे में अपने एक अनुभव की बात करने का लोभ संवरण नहीं कर पा रही हूँ। वे सभी औपचारिक स्कूल छोड़ चुके थे और काँचीपुरम में एक गैर सरकारी संगठन द्वारा चलाए जा रहे अनौपचारिक स्कूल में थे। मैं तब स्तब्ध रह गई जब मैंने अपनी कक्षा में एक छात्र को अपने साथियों को यह बताते हुए सुना कि वे कक्षा में जो कर रहे थे वह दरअसल 'पहाड़े' बनाना था। उसने कहा कि गुणा करना वैसा ही था जैसा कि जंजीरों को बेचना। उसने आगे समझाया कि – ''हमें सामान की कीमत कैसे पता चलती है? मान लो अगर कहें कि हम एक जंजीर बेचते हैं जिसकी कीमत 6 रुपये है, तब 4 जंजीरों की कीमत 24 रुपये होगी।'' यह व्याख्या इस तथ्य को देखते हुए बहुत महत्वपूर्ण है कि वे छात्र तब तक अंकों से ही जूझ रहे थे, और गणित के संकेतों जैसे x या ÷ से उनका कोई परिचय नहीं था।)

स्थिति 5 : क्षेत्रफल की समझ – वर्गाकार टाइलों का पहले चिन्तन प्रक्रिया के बाह्य प्रतीकों की तरह, और बाद में चर्चा और खोजबीन के सन्दर्भ बिन्दुओं की तरह उपयोग।

यहाँ शिक्षक प्रहस्तनीय चीजों की तरह वर्गाकार टाइलों का उपयोग संरचना बनाने और अनुभव प्रदान करने के लिए करते हैं। इसमें छात्र इन टाइलों को वर्गों और आयतों में जमाने की प्रक्रिया से यह निष्कर्ष निकालते हैं कि लम्बाई x चौड़ाई = क्षेत्रफल होता है। इस अनुभव से कम से कम इतना तो सीखा ही जा सकता है। पर यह अनुभव महत्वपूर्ण तभी बनता है जब छात्र यह देखने में सक्षम हो जाते हैं कि वर्गाकार टाइलों से न केवल 4, 9 या 16 वर्ग इकाई क्षेत्रफल के वर्ग बनाए जा सकते हैं, बल्कि किसी भी क्षेत्रफल की वर्गाकार आकृति बनाना सम्भव है (बशर्ते कि प्रहस्तनीय वस्तुओं पर कोई बन्धन न हो)। इस अनुभव में, प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग न सिर्फ अवधारणा की समझ को सहारा देने के लिए बल्कि इस समझ को बाँटने के लिए भी किया जाता है। कक्षा में होने वाली चर्चा से विद्यार्थियों को इस निष्कर्ष पर पहुँच सकना चाहिए कि परिधि की विभिन्न मापों (परिमाप) वाले ऐसे आयत बनाए जा सकते हैं जिनका क्षेत्रफल समान हो। इन टाइलों को बार–बार अलग–अलग ढंग से जमाकर छात्र इस छिपे हुए तथ्य तक भी पहुँच सकते हैं कि वर्गाकार आकृतियाँ किसी भी दिए गए क्षेत्रफल के लिए सबसे सुगठित और अल्पतम परिधि वाली होती हैं। यह प्रहस्तनीय वस्तुओं का सबसे बेहतर उपयोग होगा।

ऊपर दिए गए सभी उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि अनुभवजन्य सीखने का तरीका सिर्फ प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग करके की जानेवाली गतिविधियों का दूसरा नाम भर नहीं है। शिक्षकों को गतिविधियों की ऐसी कई शृंखलाओं में से छात्रों को ले जाना होगा, जिनमें प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग शुरुआत में प्रतीकों की तरह, फिर चिन्तन की प्रक्रिया के बाह्य निरूपण की तरह, और बाद में चर्चा और खोजबीन के लिए सन्दर्भ बिन्दुओं की तरह किया जाता है। इस बात पर भी गौर किया जाना चाहिए कि अनुभवजन्य सीखने की पद्धति में प्रारम्भ में हर छात्र पर

अलग–अलग ध्यान दिया जाता है, और धीरे–धीरे पूरी कक्षा समग्र रूप से ध्यान का केन्द्र हो जाती है। प्रारम्भ में प्रहस्तनीय चीजों का उपयोग किस तरह किया जाए यह पूरी तरह से शिक्षक ही तय करता है, और यह शिक्षक पर बहुत ज्यादा निर्भर करता है। पर धीरे–धीरे यह पूरी जिम्मेदारी छात्रों की बन जाना चाहिए। जब ऐसा हो जाए तभी 'गणितीय सोच' का 'गणितीय विषयवस्तु' में समावेश हो पाता है।

प्रहस्तनीय चीजों की सहायता से अनुभवजन्य सीखने का तरीका विशेष रूप से प्राथमिक कक्षाओं के लिए अच्छा है। किन्तु, यह सिर्फ शुरुआत होती है, प्रहस्तनीय चीजों का सिर्फ एक बार प्रयोग, या बहुत सी हिदायतों और बिखरे–बिखरे लिखने के अभ्यासों के साथ सिर्फ एक बार इनका प्रदर्शन करने से 'गणितीय सोच' के मानक स्तरों को प्राप्त करने में कोई मदद नहीं मिलेगी।

शिक्षक द्वारा प्रहस्तनीय वस्तुओं का सावधानीपूर्वक चयन करके और समझदारी से योजना बना कर, समुचित हिदायतों के साथ इनका प्रयोग करवाने से, और इसके बाद होनेवाली चर्चाओं से नन्हें सीखने वालों पर जबर्दस्त प्रभाव पड़ेगा, फलस्वरूप उनकी बौद्धिक और स्वतंत्र समझ विकसित होगी और जिससे वांछित परिणाम भी मिलेंगे।

मीना सुरेश *वर्तमान में रामानुजन संग्रहालय और गणित शिक्षण केन्द्र की मानद निदेशक हैं। वे एक शिक्षक प्रशिक्षक हैं और उन्होंने 'हैंड्स–ऑन–मैथ (करके सीखनेवाली गणित)' के बारे में शिक्षकों की 100 से अधिक कार्यशालाओं का संचालन किया है। उन्होंने इस संस्था के जरिये, काँचीपुरम के एक गैर सरकारी संगठन 'हैंड इन हैंड' के साथ मिलकर साल भर की एक ऐसी परियोजना बनाई और उसे लागू किया है जो शाम को चलने वाले 250 ट्यूशन सेन्टर (एचआईएच द्वारा संचालित) के 14,000 बच्चों को स्कूल में गणित की पढ़ाई में अतिरिक्त सहायता देती है। उनसे* meena.kavibharathi@gmail.com *पर सम्पर्क स्थापित किया जा सकता है।*

15 गणित में पुनरावृत्ति और अभ्यास का महत्वः एक दृष्टिकोण

उमा हरिकुमार



ओलम्पिक खेलों के दौरान स्केटिंग रिंक के ऊपर तैरती हुई मानवाकृति, चीनी कलाबाजों का जोश, पंडित रविशंकर के सितार या उस्ताद बिस्मिल्ला खान की शहनाई से धाराओं की भाँति निकलती सुरीली धुनें – ये सभी चीजें आपको सम्मोहित कर देती हैं। इन सभी के बीच कुछ साझी बात है जिसने इन्हें सफलता की चोटी पर पहुँचाया– वह है, प्रतिभा एवं अभ्यास।

लेकिन यह कहने के बाद सवाल उठता है कि क्या सतत पुनरावृत्ति और अभ्यास को गणित के पढ़ने–पढ़ाने की प्रक्रिया का हिस्सा होना चाहिए?

गणित यानी संख्याओं से खेलना। हम जितना ज्यादा संख्याओं से और वे क्या निरूपित करती हैं, इस बात से परिचित होते जाते हैं, उतना ही हमारे लिए उनके बीच मौजूद सम्बन्धों को देखना आसान होता जाता है। इसलिए, यह आवश्यक है कि बच्चे गिनना सीखें और किसी समूह में मौजूद चीजों की संख्या को या तो गिनकर या फिर नियमित संरचनाओं का निरीक्षण करके पहचान सकें। गणित में यह एक ऐसी समझ है जिसे सामान्यतः संख्या– बोध कहा जाता है। इस बात पर आम राय है कि इसमें संख्या नामों, मूल्यों और सम्बन्धों की जानकारी शामिल रहती है। संख्या बोध रखने वाले बच्चे विभिन्न संख्याओं के मूल्यों के तुलनात्मक अंतरों को पहचान लेते हैं और उन्हें इसकी भी समझ होती है कि इन अन्तरों को कैसे निरूपित किया जा सकता है। संख्या बोध से एक स्वतःसिद्ध गणितीय तथ्य और एक अभिकलन विधि, दोनों को अर्थ मिलता है। दोनों ही अपने विषयों के ढाँचा–निर्माण के महत्वपूर्ण अंग हैं। गर्स्टन और कार्ड अभिकलन में संख्या बोध के महत्व की तुलना मोटे तौर पर पढ़ने में बुनियादी ध्वनियों के बोध की जरूरत से करते हैं (गर्स्टन एण्ड कार्ड, 1999)। विद्यार्थियों के लिए ऊँचे दर्जे के गणितीय कौशल हासिल करने के लिए बुनियादी गणितीय तथ्यों को तत्काल स्मरण कर पाने की क्षमता जरूरी है। गारनैट ऐसी विधियों या रणनीतियों के सामान्य अनुक्रम का वर्णन करते हैं जो संख्या बोध पर निर्भर करती हैं और अन्ततः तत्काल स्मरण की क्षमता तक ले जाती हैं (गारनैट, 1992)। पॉल हाल्मॉस ने भी कहा था कि, ''गणित सीखने का एकमात्र रास्ता है गणित करना।''

''संज्ञानात्मक मनोवैज्ञानिकों ने यह तथ्य खोज निकाला है कि मनुष्यों के द्वारा प्रश्नों को हल करने के लिए जिस एकाग्रता और स्मृति का इस्तेमाल किया जा सकता है उनकी निश्चित सीमाएँ होती हैं। इन सीमाओं की बाधा से पार पाने का एक रास्ता यह है कि किसी दिए जाने वाले काम के कुछ खास अंशों को दिन–प्रतिदिन के कार्य का हिस्सा बना लिया जाए और उन्हें इतना ज्यादा अच्छे से सीख लिया जाए कि वे स्वतः होने लगें।'' (व्हाइटहर्स्ट, 2003)

शोध से प्राप्त हुई ऊपर बताई गई इन सभी जानकारियों का गणित के लिए क्या अर्थ है?

इससे वाकई बहुत मदद मिलेगी यदि प्रश्न हल करने के अन्तर्गत की जानेवाली कुछ छोटी प्रक्रियाओं, खासतौर पर बुनियादी तथ्यों से जुड़ी हुई प्रक्रियाओं, को इस सीमा तक विकसित कर लिया जाए कि वे खुद–ब–खुद की जाने लगें। यदि किसी विद्यार्थी को हमेशा पहले बुनियादी तथ्यों के उत्तरों की संगणना करना पड़ती है तो गणित की ज्यादा जटिल अवधारणाओं पर लगा सकने के लिए उसके पास उतनी चिन्तन क्षमता नहीं बचती, जितनी उस विद्यार्थी के पास रहती है जो बुनियादी तथ्यों के उत्तर, बिना कोई प्रयास किए, झट स्मृति से निकाल सकता है। उदाहरण के लिए, यदि कई अंकों की संख्या में भाग देने के सवाल करने में किसी छात्र को घटाने के लिए लगातार अपनी उँगलिओं का इस्तेमाल करना पड़ता है, या भाग की प्रक्रिया के दौरान उसे पहाड़े याद नहीं आते, तो इनके लिए ध्यान और याददाश्त लगाने के कारण, भाग के सवाल के ज्यादा बड़े उद्देश्य की ओर हर कदम पर ध्यान देकर आगे बढ़ने की उसकी क्षमता घट जाती है। परिणाम यह होता है कि बच्चा अक्सर कई अंकों के भाग में निहित अवधारणाओं को पकड़ने में असफल रहता है।

बुनियादी तथ्यों को तत्परता से स्मरण कर पाने की क्षमता विकसित न होने से गणित के उच्च–स्तरीय कौशलों –जैसे कि कई अंकों की संख्याओं का जोड़, घटाना, लम्बे भाग तथा भिन्न संख्या – के विकास में बड़ी अड़चन आ सकती है। इस क्षमता के अभाव में गणित की कक्षा में होने वाली चर्चा में भाग लेने में, सफलतापूर्वक गणित के सवाल हल करने में, और यहाँ तक कि दैनिक जीवन के लिए आवश्यक कौशलों के विकास में बाधा पड़ सकती है। इस सबके अलावा बच्चे में आत्मविश्वास की कमी पैदा हो सकती है और वह अपने साथियों के उपहास का पात्र बन सकता है। गणितीय तथ्यों का तत्परता से स्मरण कर पाने की क्षमता गणितीय उपलब्धियों की परीक्षाओं में अच्छा प्रदर्शन करने

में भी बहुत मददगार हो सकती है। संज्ञानात्मक विज्ञान के अध्ययन भी निरन्तर अभ्यास के महत्व की पुष्टि करते हैं क्योंकि इससे अभिकलन की स्वतः होने वाली प्रक्रिया विकसित होती है, उपयोगी तथ्यों के याद आने की गति तेज हो जाती है, सवालों को पहचानने में कम समय लगता है और दूसरों का हस्तक्षेप भी घट जाता है (क्लैप, बोचेज़, ट्रैबर्ट एवं लोगन, 1991; पिरौली एवं ऐंडरसन, 1985, थॉर्नडाइक, 1921)।

सवालों को हल करने की किसी विधि को सीखना तो मुख्य रूप से याद रखने और अभ्यास करने की बात है, पर किसी विधि के प्रयोजन और तार्किक आधार को समझना याददाश्त और अभ्यास की बात नहीं है। किसी विधि के चरणों को कारगर ढंग से सिखाने के लिए केवल उन चरणों के प्रभावकारी प्रदर्शन और अभ्यास के तरीके ईजाद करने की जरूरत होती है। लेकिन प्रभावी ढंग से किसी विधि का अभिप्राय और तर्काधार सिखाना कहीं ज्यादा कठिन काम है क्योंकि इसके लिए विद्यार्थियों की समझ और तार्किक सोच को विकसित करना पड़ता है। इसके लिए अन्तर्दृष्टि और लचीलेपन की जरूरत होती है। किसी चीज की समझ और उसका उपयोग कभी–कभी बिलकुल अलग बातें होती हैं। जैसे हो सकता है कि कोई गुणा करने की प्रक्रिया समझता हो, पर तेजी से और सरलता से गुणा करने में सक्षम होना बड़ी और अलग बात है। दूसरी ओर, कई लोग गुणन की प्रक्रिया को बहुत अच्छे से समझे बिना ही गुणा कर लेते हैं क्योंकि उन्हें इसकी कोई विधि सिखाई गई है जिसका उन्होंने बार–बार अभ्यास किया है। कई अन्य लोगों ने गुणन की प्रक्रिया को अवधारणात्मक दृष्टि से समझना तो सीखा होता है लेकिन उन्होंने वास्तविक संख्याओं का गुणा करने का पर्याप्त अभ्यास नहीं किया होता जिसके कारण वे बिना कैलकुलेटर के कारगर ढंग से गुणा नहीं कर पाते। अतः गणित के कई पहलुओं में समझ और अभ्यास, दोनों ही महत्वपूर्ण हैं।

- सीखने की प्रक्रिया के सिद्धान्तों की दृष्टि से, गणित के शिक्षण में शिक्षक कम से कम चार भिन्न–भिन्न पद्धतियों का उपयोग करते हैं?
- कौशल पद्धतिः इसमें गणित के प्रक्रियात्मक ज्ञान पर ध्यान केन्द्रित रहता है।
- अवधारणात्मक पद्धतिः इसमें अर्थपूर्ण ढंग से तथ्यों, नियमों, सूत्रों और प्रक्रियाओं पर ध्यान केन्द्रित रहता है।
- सवालों को हल करने की पद्धतिः इसमें गणितीय सोच के विकास पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है।
- गवेषणात्मक पद्धतिः इसमें गणितीय जाँच–पड़ताल करने के लिए आवश्यक तथ्यों, नियमों, सूत्रों, विधियों को अर्थपूर्वक
- याद रखने और गणितीय सोच के महत्व को समझने पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है।

उपरोक्त सभी पद्धतियों में किसी न किसी प्रकार का अभ्यास आवश्यक होता है।

किसी बात की पुनरावृत्ति का अभ्यास रोचक बन सकता है, यदि शिक्षक में उसी बात को विविध प्रकार से समझाने की सूझबूझ हो। संख्या 5 का परिमाण 5 कंकड़ों, कंचों से दर्शाया जा सकता है। इसी अवधारणा का अभ्यास 5 बार ताली बजाकर, 5 बार पैर पटककर, या कोई ऐसा खेल खेलकर जिसमें बच्चों को 5–5 के समूहों में बाँटना हो, करवाया जा सकता है। यहाँ पुनराभ्यास का अर्थ 5 को दस बार लिखने से बहुत अलग है।

> *''कक्षा 8 में ऐसा हुआ कि मुझे हीरो का सूत्र,* s(s-a)(s-b)(s-c), *पढ़ाना था। हमने इसके लिए एक गाना बनाया : ''सुन, सुन मेरी आशा, सुन मेरी भाषा, सुन मेरी चम्पा रे'', जिसमें ''सुन'' दर्शाता था; 'आशा, भाषा और चम्पा' क्रमशः* a,b,c *को दर्शाते थे, और 'मेरी' घटाने के चिन्ह का सूचक था। कक्षा ने जमकर इसका मजा लिया। बच्चे अपना स्थान छोड़कर आगे आ गए और नाचने लगे। कक्षा के खत्म होने तक हर बच्चा यह सूत्र सीख गया था।''*

पुनरावृत्ति और अभ्यास कब बेतुका हो जाता है और उसका सीखने की प्रक्रिया पर कोई प्रभाव होता नहीं दिखताः

किसी के लिए ऐसी किसी चीज का अभ्यास करना जिसे वह न तो करना जानता है और न समझता है, बेकार लगता है और असफल हो जाता है। किसी ऐसी चीज का अभ्यास करने से जिसमें अनुमान और त्रुटि की पद्धति से सुधार नहीं होता, परिपूर्ण योग्यता हासिल नहीं होती। किसी बच्चे के किसी सवाल को हल न कर पाने के पीछे कई कारण हो सकते हैं। उसके सामने ऐसी बातें बार–बार दोहराने से जिन्हें वह समझता हो, या ऐसी बातों को सिर्फ दोहराने भर से जिन्हें उसने पहली बार सुना हो पर जिन्हें वह समझता न हो, उसे कोई मदद मिलने वाली नहीं है। जब तक परेशानी पैदा करने वाले खास पहलू को पहचानकर

स्पष्ट नहीं किया जाता, तब तक विद्यार्थियों की जरूरतों का समाधान नहीं हो सकता।

पुनरावृत्ति और अभ्यास कब कारगर प्रतीत होते हैं?

- सीखने वाले के लिए पुनरावृत्ति और अभ्यास रोचक और आनन्दपूर्ण होना जरूरी है।
- यह तभी कारगर होगा जब उस चीज की स्पष्ट समझ हो जिसका अभ्यास किया जा रहा हो।
- सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में इनका व्यवस्थित ढंग से समावेश किया जाना चाहिए।
- दोहराए जाने वाले अभ्यास के लिए टैक्नोलॉजी (यांत्रिकी) एक महत्वपूर्ण उपकरण होती है।

क्या केवल पुनरावृत्ति और अभ्यास से सीखने की प्रक्रिया विकसित हो सकती है?

कई अध्ययनों से पता चलता है कि ठोस परिणाम प्राप्त करने के लिए पुनरावृत्ति और अभ्यास के साथ समय–समय पर पुनरावलोकन भी किया जाना जरूरी है। एक अध्ययन में ग्रे ने पाया कि जिन बच्चों ने अंकगणित के नियमों के शिक्षक द्वारा मूल प्रस्तुतिकरण के बाद पहले और सातवें दिन उनका पुनरावलोकन किया, उन्होंने इन नियमों को उन बच्चों की तुलना में ज्यादा अच्छे से सीखा जिन्होंने प्रस्तुतिकरण के बाद पहले और दूसरे दिन उनका पुनरावलोकन किया। जहाँ अधिकांश पाठ्यपुस्तकें अध्यायों के अन्त में पुनरावलोकन को शामिल करती हैं, वहीं शोध से पता चलता है कि पुनरावलोकन का, ''शिक्षण कार्यक्रम में व्यवस्थित ढंग से नियोजित करके समावेश किया जाना चाहिए।''

विद्यार्थियों को पर्याप्त पुनरावृत्ति और अभ्यास न कराए जाने के फलस्वरूप वे अक्सर किसी कक्षा में पढ़ाए गए टॉपिक में पारंगत नहीं हो पाते। उन्हें सम्बन्धित अवधारणा का थोड़ा बहुत ज्ञान तो हासिल हो जाता है पर वे उस पर अधिकार प्राप्त नहीं कर पाते ''. ...*यह ऐसी प्रक्रिया है जिसे हर उस व्यक्ति ने देखा होता है जो गणित पढ़ाता हैः विद्यार्थियों को हमेशा वह सब पढ़ाया जाना पड़ता है जो उन्हें पिछले पाठ्यक्रम में सीख लिया होना चाहिए था। (हालाँकि हम, अर्थात शिक्षकगण, निश्चय ही इसके अपवाद थे, और परिणामस्वरूप हमें अपने विद्यार्थियों की कमियाँ समझने में कठिनाई होती है)। एक औसत विद्यार्थी अंकगणित की कक्षा में सचमुच में भिन्नों को जोड़ना नहीं सीख पाता, लेकिन बाद में जब वह बीजगणित के एक पाठ्यक्रम से पार हो जाता है तब तक वह सांखिक भिन्नों को समझने में सक्षम हो जाता है। वह बीजगणित के पाठ्यक्रम के दौरान बीजगणित नहीं सीख पाता। इसे वह अवकलन गणित (कैलकुलस) पढ़ने के दौरान सीखता है जब उसे बीजगणित का उपयोग करने की मजबूरी होती है। ना ही वह अवकलन की कक्षा में अवकलन सीखता है, परन्तु जब आगे चलकर वह अवकलित समीकरणों (डिफ्रैन्शियल इक्वेशन्स) पर पहुँचता है तो उनसे गुजर चुकने पर हो सकता है कि प्रारम्भिक अवकलन गणित पर उसकी खासी अच्छी पकड़ बन जाए। ऐसा ही पाठ्यक्रमों की सभी सीढ़ियाँ चढ़ने के दौरान होता है। जाहिर है कि सबसे उच्च स्तरीय पाठ्यक्रम तो उसे पढ़ाने के द्वारा ही सीखा जाता है। इसकी वजह सिर्फ यह नहीं होती कि पिछले शिक्षक ने अपना काम, 'बहुत खराब ढंग से' किया होगा। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि हर नए टॉपिक का पर्याप्त अभ्यास करने के लिए समय नहीं होता, और यदि होता भी तो ऐसा करना असहनीय रूप से नीरस होता है।''*

—राल्फ पी. बोएस

पुनरावृत्ति और अभ्यास गणित के सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का स्वाभाविक अंग होने चाहिए। एक रचनाशील शिक्षक इसे गणित शिक्षण के चित्रपट में इस तरह बुन देगा कि एक सुन्दर संरचना निर्मित हो जाएगी। तब पुनरावृत्ति की प्रक्रिया सीखने के आनन्द को नष्ट नहीं करेगी, बल्कि सीखने वाले को उत्साहित करके उसे और अधिक खोजने के लिए उकसाएगी। अतः हम अभ्यास और ऊब के बजाय अभ्यास और रोमांच को लक्ष्य बनाकर चलें!

उमा हरिकुमार *पिछले 25 वर्षों से गणित की शिक्षक रही हैं। उन्होंने सोफिया हाईस्कूल, बंगलौर तथा विभिन्न केन्द्रीय विद्यालयों में पढ़ाया है। वे 2003 में अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन की सदस्य बनीं और वर्तमान में वे इसके अकादमिक एवं पैडागॉजी समूह की सलाहकार हैं। उनसे* umaharikumar@yahoo.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

16 2+2 =? डिस्कैल्कुलिया की पहचान

सुलता शिनॉय



ऐसे कई कारण होते हैं जिनकी वजह से कोई बच्चा पढ़ाई में दिक्कत महसूस कर सकता है। ऐसे ही कुछ कारण हैं; तंत्रिका दुर्बलता, पोषण सम्बन्धी कारक, बौद्धिक अक्षमता, भावात्मक–व्यवहारात्मक मुद्दे, उचित स्कूली शिक्षा न मिल पाना, घर का वातावरण ठीक न होना, शिक्षकों और माता–पिता से मार्गदर्शन न मिल पाना आदि। लर्निंग डिसेबिलिटी (पढ़ने की अक्षमता) या एल डी का खास तौर पर आशय होता हैः शिक्षा के पर्याप्त अवसर मिलने और जरूरी बौद्धिक सामर्थ्य होने के बावजूद किसी बच्चे का भाषा के अर्थ को समझने, अभिव्यक्ति और गणितीय योग्यता के क्षेत्रों में औसत से कहीं कमतर प्रदर्शन करना। एल डी को जन्मजात और आन्तरिक समस्या माना जाता है, यानी, केन्द्रीय तंत्रिका तंत्र का ठीक से काम न कर पाना इसकी वजह माना जाता है। पर पर्यावरण सम्बन्धी कारक इस अक्षमता को और बढ़ा सकते हैं।

एल डी से पीड़ित बच्चों को न सिर्फ पढ़ाई में बल्कि जानकारियों की बुनियादी समझ बनाने में भी दिक्कत होती है। जैसे कि दृष्टि सम्बन्धी समस्याएँ, आकृतियों और जमीन में भेद न कर पाना, याददाश्त (देखी गई तथा सुनी गई चीजों की), ध्वनियों को समझ पाने में खामियाँ और दृष्टि–आधारित अंग संचालन की समस्याएँ होना। इसके अलावा उन्हें कई मनोवैज्ञानिक समस्याएँ भी झेलनी पड़ती हैं, जैसे आत्महीनता की भावना, व्यवहारगत समस्याएँ, भावनात्मक गड़बड़ियाँ, स्वनियंत्रित व्यवहार न कर पाना, सामाजिक मेलजोल न कर पाना, प्रेरणा की कमी और परासंज्ञानात्मक कमियाँ।

डिसकैल्कुलिया शब्द यूनानी और लैटिन का मिश्रण है जिसका मतलब होता हैः ''खराब ढंग से गिनना''। उपसर्ग ''डिस'' यूनानी भाषा से आया है जिसका अर्थ होता है ''खराब ढंग से''। ''कैल्कुलिया'' लैटिन शब्द ''कैलकुलेर'' से आया है जिसका अर्थ होता है ''गिनना''। ''कैलकुलेर'' शब्द निकलता है ''कैलकुलस'' से जिसका मतलब होता है ''कंकड़'' या एबेकस (गिनतारे) का एक गणक। डिस्लैक्सिया (लिखे हुए शब्दों को पहचानने और पढ़ने की अक्षमता) तथा विकास सम्बन्धी डिस्प्रैक्सिया (ऐसी गड़बड़ी जो किसी काम की शुरुआत करने, व्यवस्था जमाने और उसे अंजाम देने की क्षमता को प्रभावित करती है) की अपेक्षा डिस्कैल्कुलिया के बारे में लोग कम जानते हैं; यद्यपि यह उनसे मिलती–जुलती और सम्भवतः जुड़ी हुई होती है।

ऐसे लोग डिस्कैल्कुलिया से पीड़ित हो सकते हैं जिन्हें समय, मापन, और स्थान विस्तार (स्पेस) के आधार पर विचार करने में कठिनाई होती है। मौजूदा अनुमानों से संकेत मिलता है कि इससे जनसंख्या के लगभग पाँच प्रतिशत लोग प्रभावित हो सकते हैं।

डिस्कैल्कुलिया की पहचान मूलतः ऐसे मरीजों से हुई जो मस्तिष्क के कुछ खास हिस्सों को हुई क्षति के परिणामस्वरूप कुछ खास अंकगणितीय क्षमताओं से वंचित रहते हैं। हाल के शोधों से पता चलता है कि डिस्कैल्कुलिया विकासात्मक ढंग से, आनुवांशिक स्रोत से जुड़ी सीखने की ऐसी अक्षमता की तरह भी हो सकती है जो व्यक्ति के समझने, याद रखने और संख्याओं या संख्यात्मक तथ्यों का वांछित उपयोग करने की योग्यता को प्रभावित करती है। यद्यपि इस शब्द का इस्तेमाल विशेष रूप से अंकगणितीय प्रक्रियाओं को सम्पन्न करने की अक्षमता बताने के लिए किया जाता है, पर इसे तुलनात्मक परिमाणों की अमूर्त अवधारणाओं को मानसिक रूप से न पकड़ पाने की (अर्थात ''संख्याबोध'' में कमी होने की) ज्यादा बुनियादी असमर्थता के रूप में भी परिभाषित किया जाता है।

डिस्कैल्कुलिया को छोटी उम्र में ही पहचाना जा सकता है। अनुभव से यह सिद्ध हुआ है कि शिक्षण का थोड़ा भिन्न तरीका अपनाकर डिस्लैक्सिया की समस्या से पार पाया जा सकता है। रोचक बात यह है कि ऐसे ही डिस्कैल्कुलिया से भी निपटा जा सकता है। परन्तु, सीखने की अक्षमताओं के कारण के रूप में अपेक्षाकृत कम पहचाने जाने के कारण डिस्कैल्कुलिया पर अक्सर ध्यान नहीं जाता।

> *''यहाँ मुख्य समस्या वह तरीका है जिस तरह बच्चों को गणित पढ़ाया जाता है; अक्सर इसके परिणाम गणित के प्रति भय और अरुचि होते हैं जो आगे चलकर गणित में खराब प्रदर्शन का कारण बनते हैं। पर ऐसा निम्नस्तरीय प्रदर्शन डिस्कैल्कुलिया से मिलता–जुलता होने पर भी डिस्कैल्कुलिया नहीं होता।''*

नीचे बुनियादी रूप से आवश्यक सात गणितीय कौशलों की सूची दी गई हैः

1. क्रमबद्ध ढंग से निर्देशों का पालन करने की क्षमता।
2. दिशाबोध, स्थान विस्तार (स्पेस) में अपनी स्थिति, विभिन्न दिशाओं की ओर उन्मुख होने और स्थान विस्तार को व्यवस्थित करने की गहरी समझ। इनके उदाहरणों में दाएँ से बाएँ में फर्क करने, तथा उत्तर/दक्षिण/पूर्व/पश्चिम, ऊपर/नीचे, आगे/पीछे, क्षैतिज/ऊर्ध्वाधर और कर्ण की दिशाएँ आदि पहचानने की क्षमताएँ शामिल हैं।
3. नियमित संरचनाओं को पहचानना और उनका विस्तार करना।
4. मानसिक रूप से देख पानाः अपने मन में चित्रों की कल्पना करने और उनमें हेरफेर करने की क्षमताएं उदाहरण के लिए त्रिआयामी घन की कल्पना करना।
5. अनुमाननः आकार, राशि, संख्या और परिमाण का सुशिक्षित तथा तर्कसंगत अनुमान लगाने की क्षमता।
6. निगमनात्मक तर्कः तर्क द्वारा किसी व्यापक सिद्धान्त से शुरू करके उसके किसी विशेष उदाहरण पर पहुँचने, या बताई गई आधार मान्यता से विचार करते हुए उसकी तार्किक परिणति पर पहुँचने की क्षमता।
7. आगमनात्मक तर्कः एक तरह की स्वाभाविक समझ जो सचेत ध्यान या तर्क का परिणाम नहीं होती और जिसके द्वारा सरलता से विभिन्न परिस्थितियों में नियमित संरचनाओं, तथा विभिन्न प्रक्रियाओं और अवधारणाओं में अन्तर्सम्बन्धों को देखा जा सकता है।

किसी गणितीय अवधारणा को पूरी तरह से आत्मसात करने के पहले कोई विद्यार्थी सीखने के छः स्तरों से होकर गुजरता हैः

1. सहज ज्ञान पर आधारित सम्बन्धः विद्यार्थी नई अवधारणा को पूर्वज्ञान और अनुभवों से जोड़ता है। वह उनसे उसका सम्बन्ध बिठाता है।
2. स्थूल प्रतिरूप बनानाः विद्यार्थी ऐसी स्थूल सामग्री ढूँढता है जिससे वह उस अवधारणा को प्रकट कर सके या उसे निरूपित करने वाला प्रतिरूप बना सके।
3. चित्रात्मक या दृश्यात्मक निरूपणः विद्यार्थी उस अवधारणा को निरूपित करने के लिए चित्र बनाता है। इस तरीके से वह एक स्थूल (या सजीवता से कल्पित) उदाहरण को प्रतीकात्मक चित्र या निरूपण से जोड़ता है।
4. अमूर्त या प्रतीकात्मकः संख्या प्रतीकों (अंकों), संक्रियात्मक चिन्हों, सूत्रों और समीकरणों का उपयोग करके विद्यार्थी उस अवधारणा को गणितीय लिपि में रूपान्तरित करता है।
5. उपयोगः विद्यार्थी सफलतापूर्वक उस अवधारणा को वास्तविक जीवन की परिस्थितियों में या छोटी परियोजनाओं (प्रॉजेक्टों) में लागू करता है।
6. सम्प्रेषणः विद्यार्थी सफलतापूर्वक दूसरों को वह अवधारणा सिखा सकता है, या परीक्षा में उसे ठीक से व्यक्त कर सकता है।

स्कूल–पूर्व और प्राथमिक वर्षों के पाठ्यक्रमों को गणित सीखने की तैयारी के लिए आवश्यक कौशलों के विकास पर केन्द्रित होना चाहिए। यहाँ मुख्य समस्या वह तरीका है जिस तरह बच्चों को गणित पढ़ाया जाता है। अक्सर इसके परिणाम गणित के प्रति भय और अरुचि होते हैं जो आगे चलकर गणित में खराब प्रदर्शन का कारण बनते हैं। पर ऐसा निम्नस्तरीय प्रदर्शन डिस्कैल्कुलिया से मिलता–जुलता होने पर भी डिस्कैल्कुलिया नहीं होता।

शिक्षकों और विद्यार्थियों के लिए सीखने की विभिन्न शैलियों या ''गणित सीखने वाले विभिन्न व्यक्तित्वों'' की जानकारी होना और उनका कक्षा में समावेश करना जरूरी है। इसके साथ ही उन्हें हर शैली के अनुरूप शिक्षण पद्धति का ज्ञान और उसका उपयोग भी आना चाहिए। यहाँ इस बात पर जोर दिए जाने की जरूरत है कि प्रारम्भिक स्तरों पर हो सकता है कि अधिकांश बच्चे संख्याओं को उल्टा कर दें, उनके दर्पण जैसे उल्टे प्रतिबिम्ब लिखें और गणितीय अवधारणाओं के साथ कठिनाई महसूस करें। पर यदि किसी बच्चे में ये लक्षण उस स्तर के बाद भी बने रहते हैं जिस स्तर तक अधिकांश बच्चे इनके पार हो जाते हैं, तो डिस्कैल्कुलिया की आशंका होनी चाहिए। जब तक कोई बच्चा गणित की अवधारणाएँ सीखने के लिए संज्ञानात्मक रूप से तैयार नहीं होता तब तक इनको जल्दी सिखाया जाना केवल गणित के प्रति नकारात्मक अनुभवों और रवैये और अन्ततः गणित के आतंक का कारण बनेगा। जब तक बच्चा विकासात्मक दृष्टि से इसके लिए तैयार नहीं हो जाता तब तक माता–पिता और शिक्षकों को प्रतीक्षा करनी चाहिए। इस दौरान उसे विभिन्न प्रकार के अनौपचारिक अनुभव प्रदान किए जाने चाहिए। अधिकांश संस्कृतियों में गणित के कौशलों में लिंगभेद के कारण अन्तर होने की बात कही जाती है। ऐसी परिकल्पना की जाती है कि ये अन्तर लिंग–आधारित मस्तिष्क संरचना और कार्य के कारण होने के साथ–साथ उतने ही सामाजिक शक्तियों के कारण भी होते हैं। लड़कों और लड़कियों को विकास के हर स्तर पर समान गतिविधियों और अनुभवों का अवसर देकर कौशलों में लिंगभेद को समाप्त किया जा सकता है, जिसके फलस्वरूप लड़के, लड़कियों दोनों का समान रूप से परिष्कृत तंत्रिकात्मक विकास होगा।

डिस्कैल्कुलिया का निदान करना

गणित में नाकामी, अर्थात सामान्य मानसिक सक्रियता वाले बच्चों की मानसिक आयु और गणितीय आयु के बीच होने वाले औसत अन्तर से नीचे एक–दो मानक विचलन पाया जाना साफ तौर पर गणितीय योग्यता के विकास में कमी का सूचक होता है:

1. मात्रात्मक डिस्कैल्कुलिया गिनने और अभिकलन करने की पर्याप्त क्षमता का न होना है।
2. गुणात्मक डिस्कैल्कुलिया निर्देशों को समझने में कठिनाइयों और किसी गणितीय प्रक्रिया के लिए आवश्यक कौशलों पर अधिकार करने में असफल रहने का परिणाम होता है।
3. माध्यमिक डिस्कैल्कुलिया के अन्तर्गत प्रतीकों या संख्याओं के साथ काम करने में असमर्थ होना आता है।

सम्भावित लक्षण

1. गिनती करने, संख्याओं को पहचानने, गणितीय संकेतों का मन में उपयोग करने और/या लिखने, संख्याओं और प्रक्रियाओं की क्रमबद्ध स्मृति आदि में होने वाली संख्यात्मक परेशानियाँ, तथा संख्याओं को पढ़ने–लिखने, तुरन्त स्मृति से याद कर पाने, सुनी गई बातों को समझने और याद रखने, इन सबमें घालमेल करना।
2. हो सकता है कि बच्चा संख्याओं को दिमाग में घालमेल के कारण उल्टा कर दे (21 को 12 समझ लेना), मिलते–जुलते अंकों (6 और 9) को एक दूसरे की जगह इस्तेमाल करे, अनुचित रूप से अंकों, शब्दों और चिन्हों को शामिल कर ले या छोड़ दे, स्थानीय मान पर ध्यान न देते हुए संख्याओं को पढ़े। जैसे 5007 को 'पाँच सौ सात' या 576 को 'पाँच सात छः' पढ़े।
3. रोजमर्रा के कामों, जैसे चिल्लर जाँचना या ऐनालॉग घड़ियों से समय पढ़ना, आदि में दिक्कत होना।
4. वित्तीय नियोजन और बजट बनाने की प्रक्रिया को कभी–कभी ऐसे बुनियादी स्तर पर भी समझने में असमर्थ होना, जैसे कि खरीदारी की डलिया में रखी चीजों की कुल कीमत का अनुमान लगाने या चैकबुक का हिसाब मिलाने में असमर्थ होना।
5. गुणा करने के पहाड़ों, घटाना, जोड़ना, भाग देना, मानसिक अंकगणित आदि में कठिनाई होना।
6. बाएँ और दाएँ में भेद करने में विशेष रूप से समस्याएँ होना।
7. मार्ग समझने के लिए नक्शे को पढ़ने, या नक्शे के ऊपरी छोर को उत्तर दिशा मानने के सामान्य उपयोग के बजाय उसे तात्कालिक दिशा की ओर मानसिक रूप से 'घुमाने' में कठिनाई होना।
8. किसी वस्तु के आकार की मापों या दूरी का मानसिक रूप से अनुमान लगाने में विशेष कठिनाई होना।
9. अत्यन्त गम्भीर मामलों में इस समस्या के परिणाम स्वरूप गणित तथा गणितीय–संख्यात्मक उपकरणों/संयोजनों के प्रति सतत बनी रहने वाली आशंका मन में घर कर जाती है।
10. हो सकता है कि बच्चा संख्याओं को पढ़ने और लिखने में समर्थ हो लेकिन उनके अर्थ से अनजान हो।
11. बच्चा किन्हीं वस्तुओं की बताई गई संख्या को न पहचान सके।
12. अक्सर होने वाली गलतियाँ ये होती हैं: इस तरह की क्रियाओं जैसे +/-, -/÷, x/÷, x/ में घालमेल करना; जटिल प्रक्रियाओं को गलत समझ लेना या उनका अतिसरलीकरण कर देना; मन में हिसाब लगाने के बजाय संगणना करने की जरूरत होना; मानसिक या लिखित संगणना में मदद के लिए उँगलियों का उपयोग करना।
13. जोड़ने, घटाने, गुणा करने और भाग देने के नियमों को सीखने और उनका उचित इस्तेमाल करने में असमर्थ होना जिसके परिणामस्वरूप बच्चा गणित की क्रियाओं को सफलतापूर्वक करने में अक्षम हो जाता है।
14. गिनती के क्रमों, संक्रियाओं के क्रमों, गणितीय तथ्यों, समय, दिशा, समय–सारणियों आदि की कमजोर याददाश्त होना।

सम्भावित कारण

वैज्ञानिकों को अभी भी डिस्कैल्कुलिया के कारणों को पूरी तरह समझना बाकी है। अन्वेषणों से संकेत मिलता है कि यह तंत्रिका सम्बन्धी कारणों से हो सकता है क्योंकि मस्तिष्क के आवरण में टैम्पोरल लोब और पैराइटल लोब की संधि के हाशिये के ऊपर या उसके कोणीय घुमावों पर हुई क्षति का डिस्कैल्कुलिया से सम्बन्ध होना पाया गया है, या फिर यह सक्रिय याददाश्त में कमी होने के कारण भी हो सकता है। इसके अन्य कारण अल्पकालीन स्मृति में व्यवधान या कमी आना हो सकते हैं जिससे गणनाओं को याद रखना मुश्किल हो जाता है। इसके बावजूद डिस्कैल्कुलिया से पीड़ित बच्चे और वयस्क सामान्य बुद्धि के होते हैं, लेकिन फिर भी सामान्य परीक्षाओं या बुद्धि–परीक्षाओं के उनके परिणाम अक्सर एक असमान तस्वीर पेश करते हैं। हालाँकि डिस्कैल्कुलिया से ग्रस्त बच्चों और वयस्कों में ज्यादा संख्या उनकी होती है जो बिना अड़चन के पढ़ सकते हैं और पढ़े हुए को समझ सकते हैं। फिर भी इस समस्या से पीड़ित 20–30% लोगों में पढ़ने और गणित करने

में कठिनाई होने के लक्षण पाए जाते हैं। यहाँ तक कि साधारण अंकगणितीय हिसाब लगाने के काबिल बनने के लिए भी उन्हें बहुत मानसिक प्रशिक्षण की जरूरत हो सकती है।

हो सकता है कि किसी बच्चे को संख्याओं की, अपने–आप में या संख्यासूचक संकेतों के रूप में, केवल सीमित समझ हो।

डिस्कैल्कुलिया के एक और प्रकार का सम्बन्ध योजना बनाने में कठिनाइयों से होता है जिनके फलस्वरूप बच्चा कारगर ढंग से संगणनाएँ करने में असमर्थ रहता है। अंकगणित के सवालों को हल करने के लिए स्पष्ट रणनीति का अनुसरण करने में ऐसे बच्चे को दिक्कतें आती हैं; गणितीय समस्या की बुनियादी अन्तर्क्रियाओं में उसका दिमाग पटरी से उतर जाता है। डिस्कैल्कुलिया का आधार दृश्य जगत को समझने में होने वाली समस्याएँ भी हो सकती हैं। इनके फलस्वरूप ऐसे कामों में कठिनाइयाँ आती हैं जिनमें संगणनाएँ करने के साथ–साथ तार्किक ढंग से सोचना भी पड़ता है, उदाहरण के लिए एक साधारण घड़ी को पढ़ना सीखना और उसकी सुइयों की स्थितियों का तात्पर्य समझना।

गणित में होने वाली कठिनाइयाँ, ऐसे बच्चे को सीखने की व्यापक प्रक्रिया में होने वाली समस्याओं से जुड़ी रहती हैं। गणित के साथ–साथ दूसरे क्षेत्रों में भी उसकी सीखने की प्रक्रिया प्रायः सामान्य से अधिक समय लेती है।

व्यक्तियों पर डिस्कैल्कुलिया का प्रभाव उम्र भर रहता है। डिस्कैल्कुलिया से ग्रस्त बच्चे कम उम्र में ही प्राथमिक स्कूल में पिछड़ जाते हैं, और हो सकता है कि उनमें गणित के प्रति गहरी दुश्चिन्ता या अरुचि पैदा हो जाए। माध्यमिक स्कूल में इसकी बहुत सम्भावना है कि उन्हें गणित और विज्ञान के पाठ्यक्रमों में पास होने के लिए संघर्ष करना पड़े, और फलस्वरूप वे पाएँ कि जीविकोपार्जन क्षेत्रों के उनके विकल्प कम हो गए हैं। ऐसी स्थितियाँ व्यक्ति को अत्यन्त विचलित कर सकती हैं जिसका परिणाम भावनात्मक संकट हो सकता है। यह भी हो सकता है कि वे अपने वयस्क जीवन में कम कमा पाएँ और उन्हें अपने रोजमर्रा के वित्तीय मसलों को सम्हालने में परेशानियाँ आए। डिस्कैल्कुलिया से ग्रस्त लोगों के लिए गणित एक विचलित कर देने वाला अनुभव होता है और बीती असफलताओं के कारण वह प्रतिकूल भावों से भरा होता है।

कई लोग सोचते हैं कि चूंकि एल डी (सीखने की अक्षमता) को केन्द्रीय तंत्रिका संरचना की एक नाकामी माना जाता है इसलिए उसे बदला नहीं जा सकता। पर अब हम जानते हैं कि हमारे मस्तिष्क में, विशेषकर बचपन में, परिस्थितियों के अनुकूल ढलने की बहुत क्षमता होती है; वह लचीला होता है। शोध ने पहले ही यह दिखाया है कि प्रशिक्षण कार्यक्रमों से पढ़ने में प्रयुक्त होने वाले मस्तिष्क के क्षेत्रों की कार्यक्षमता बढ़ सकती है। डिस्कैल्कुलिया के साथ भी ऐसा होने की सम्भावना है। अभी भी डिस्कैल्कुलिया के बारे में बहुत कुछ है जो हम नहीं जानते क्योंकि इस पर होने वाला शोध डिस्लैक्सिया की तुलना में 30 साल पीछे है। पर इस स्थिति में अब, विशेष रूप से हाल के वर्षों में, सुधार होना प्रारम्भ हो गया है।

शमन करने वाली रणनीतियाँ

हालाँकि डिस्कैल्कुलिया का निदान करना कठिन हो सकता है पर ऐसे बच्चों को गणित सीखने में सहायता करने के लिए कुछ रणनीतियाँ हैं जिनके बारे में शिक्षकों और पालकों को पता होना चाहिए।

1. इस श्रेणी के किसी बच्चे की सबसे अच्छे ढंग से मदद उसे धीमी गति से काम करने की छूट देकर और सीखने की सरल सामग्री देकर की जा सकती है।
2. उन्हें उदाहरण दें और सवालों को वास्तविक जीवन से जोड़ने का प्रयास करें।
3. विद्यार्थियों को गणित के सवालों की मानसिक संकल्पना करने के लिए अतिरिक्त मेहनत करने को प्रोत्साहित करें। सवालों के चित्र बनाएँ या सवाल को समझने के लिए बच्चे से उसका चित्र बनवाएँ और यह सुनिश्चित करें कि वह दी गई किसी भी दृश्यात्मक जानकारी (चित्र, चार्ट, ग्राफ आदि) को इत्मीनान से देखे।
4. बच्चे से सवालों को जोर से पढ़वाएँ और ध्यान से सुनने को कहें। इससे श्रवण कौशलों का उपयोग करने का अवसर मिलता है।
5. छोटे विद्यार्थियों के लिए चौखाने वाली कॉपियों की व्यवस्था करके उन्हें इनका उपयोग करने को प्रोत्साहित करें ताकि उनकी संख्याएँ एक सीध में रहें।
6. कुछ अतिरिक्त वर्कशीट्स प्रदान करें ताकि बच्चा जरूरत से ज्यादा दृश्यात्मक जानकारी (दृश्यात्मक प्रदूषण) से भ्रमित न हो जाए। परीक्षाओं में बिना घिचपिच के संगणना करने के लिए लाइनों सहित पर्याप्त जगह वाला कागज विशेष रूप से प्रदान करें।
7. डिस्कैल्कुलिया से ग्रस्त विद्यार्थियों को गणित के तथ्य याद करने में अतिरिक्त समय लगाना जरूरी है। पुनरावृत्ति बहुत महत्वपूर्ण है। याद कराने के लिए तुकबन्दियों और संगीत का उपयोग करें।
8. अनेक विद्यार्थी ऐसे होते हैं जिन्हें कुछ खास अवधारणाएँ समझने के लिए हर विद्यार्थी पर एक–एक व्यक्ति को अलग

से ध्यान देने की जरूरत पड़ती है। इसलिए हर विद्यार्थी से स्कूल के बाद किसी शिक्षा–सहायक, माता–पिता या शिक्षक की सहायता से एक–के साथ–एक के माहौल में कार्य करवाएँ ।

9. यदि सम्भव हो तो विद्यार्थी को एक–के साथ–एक के आधार पर परीक्षा देने की सुविधा दें।

10. किसी सवाल को करने में गलती करने पर विद्यार्थी को उसे फिर से करने के लिए एक और मौके की जरूरत होती है। अक्सर गलतियाँ सवाल को गलत ढंग से देखने का परिणाम होती हैं।

11. प्रारम्भिक स्तरों पर परीक्षा के सवालों को ऐसा बनाएँ जो केवल आवश्यक कौशलों की परीक्षा लें। शुरूआती शिक्षा में उन्हें बड़ी संख्याओं और अनावश्यक संगणनाओं से मुक्त रखा जाना चाहिए।

12. सवालों को हल करने के लिए अतिरिक्त समय दें और विद्यार्थी को आश्वस्त करें ताकि वह दुश्चिन्ता के कारण हताश न हो जाए। धैर्य रखें और सकारात्मक बने रहें।

13. अभ्यास के लिए अतिरिक्त सवाल दें और हो सके तो विद्यार्थी की मदद के लिए अलग से एक सहायक शिक्षक या शिक्षा विशेषज्ञ की व्यवस्था करें।

14. जब कोई नयी विषय–सामग्री प्रस्तुत करें तो यह सुनिश्चित कर लें कि डिस्कैल्कुलिया से ग्रस्त विद्यार्थी हर चरण को ठीक–ठीक लिख पाए।

टैक्नोलॉजी और संसाधन

गणितीय अक्षमताओं से ग्रस्त विद्यार्थियों की मुश्किलें आसान करने की टैक्नोलॉजी उतनी आसानी से उपलब्ध नहीं है जितनी आसानी से पढ़ने और लिखने की टैक्नोलॉजी उपलब्ध है।

पर यह सीमित टैक्नोलॉजी भी विशेष रूप से उन बच्चों के लिए मददगार हो सकती है जिन्हें संख्याओं को सही क्रम में लिखने में समस्याएँ आती हैं। वर्तमान में उपलब्ध सबसे आम उपकरणों में निम्नलिखित शामिल हैं:

1. हाथ में पकड़े जाने वाले कैलकुलेटर जो ऐसे सीखने वाले की मदद कर सकते हैं जिसे संख्याओं को सही क्रम में लिखने में दिक्कतें आती हैं।

2. बोलने वाले कैलकुलेटर जो जानकारी को बोलकर बताते हैं जिसकी सहायता से वाचन–संश्लेषण द्वारा संगणनाएँ की जाती हैं।

3. विशेष प्रावधानों वाले कैलकुलेटर जो उपयोग करने वाले को संख्याओं, फलनों, पूरे समीकरणों और परिणामों को बोलकर बताने और साथ ही साथ दर्शाने के विकल्पों में से चुनाव करने की सुविधा देते हैं।

4. कम्प्यूटर के स्क्रीन पर दिखने वाले और वाचन–संश्लेषण से युक्त संगणना करने के प्रोग्राम।

5. कैलकुलेटरों और जोड़ने वाली मशीनों के लिए बड़े आकार के प्रदर्शन स्क्रीन।

6. स्तम्भों को सही बनाए रखने के लिए उन्हें अलग–अलग रंगों से चिन्हित करना।

7. अंकों के लिए बड़े बटन और बड़े आकार का कुँजीपटल (कीपैड)।

8. सीडी–रोम पर पाठ्यपुस्तकें और गणित के पाठों के वीडियोटेप बनाना।

9. कम्प्यूटर की सहायता से शिक्षा (कम्प्यूटर–एडेड इन्स्ट्रक्शन सीएआई) के अन्तर्गत गणित के पाठ्यक्रम (विशेष जरूरतों वाले विद्यार्थियों के लिए शिक्षा)।

बच्चों में डिस्कैल्कुलिया कई तरीकों से मौजूद हो सकता है। शुरुआत में बच्चे को गणित में कठिनाई या हिचकिचाहट हो सकती है। प्रारम्भिक कक्षाओं में ऐसा होने पर तुरन्त ही सीखने की असमर्थता की सम्भावना के प्रति सजग हो जाना चाहिए। यही वह समय है जब उपयुक्त प्रयास सबसे ज्यादा कारगर होता है। इस क्षेत्र में हुए हालिया शोध का जोर भी समस्या को जल्दी पहचानने पर है। एक बार जब ऊपर बताए गए आधारों पर किसी बच्चे में इस समस्या को पहचान लिया जाता है तो आगे और खोजबीन किए जाने की जरूरत होती है। सीखने की असमर्थता का दायरा और उसकी गम्भीरता के साथ ही विभिन्न सहयोगी कारकों जैसे भौतिक, मानसिक, सामाजिक – भावात्मक, शैक्षणिक और पारिवारिक कारकों की ताकत को पहचाना जाना बेहद जरूरी है ताकि बच्चे की सहायता करने के लिए उचित कदम उठाए जा सकें। हमारे ध्यान का सबसे पहला केन्द्र बच्चा होना चाहिए और उसकी मदद करने के लिए सभी आवश्यक प्रयास किए जाने चाहिए ताकि उसका समुचित विकास हो और वह बड़ा होकर अपने व्यक्तित्व की पूर्ण सम्भावना को साकार कर सके। स्कूल में खराब प्रदर्शन और भावनात्मक तथा व्यवहारगत समस्याओं से बच्चे को बचाने में भी समस्या की जल्दी पहचान होने से मदद मिलती है।

सार :

गणित सीखने की अक्षमता (डिस्कैल्कुलिया) के उपचार के लिए कम उम्र में ही प्रयास किया जाना उतना ही महत्वपूर्ण है जितना डिस्लैक्सिया के लिए । किसी विद्यार्थी के गणितीय विकास के किसी भी उम्र में किए गए निदानात्मक मूल्यांकन से समस्याग्रस्त क्षेत्रों का ठीक पता चलना चाहिए, और गणित में सहायता के लिए किए जाने वाले प्रयास की कार्ययोजना तथा उपयुक्त अनुशंसाएँ प्रस्तुत की जानी चाहिए।

लेख में आए सन्दर्भः

1. Sharma, Mahesh 1989. How Children Learn Mathematics: Professor Mahesh Sharma, in interview with Jith Bill Domoney. London, England: Oxford Polytechnic, School of Education. 90 min. Educational Methods Unit. Videocassette.
2. Sharma, Mahesh. 1990. "Dyslexia, Dyscalculia, and Some Remedial Perspectives for Mathematics Learning Problems." Math Notebook: From Theory into Practice 8, no. 7, 8, 9 & 10. (September, October, November, & December).
3. www.dyscalculia.org by Renee M. Newman, M.S. Special Education Location: http://www.dyscalculia.org/Edu502.html. © MAY 1998 Renee M. Newman
4. Shenoy, Sulata. Characteristics of Learning Disabilities and their identification in Learning Difficulties Edited by Dr. Khwaja A., 2002
5. www.dyscalculia.org
6. www.wikipedia.org
7. www.indianjmedsci.org/article 2007 Clinical and psychoeducational profile of children with specific learning disability and co-occurring attention-deficit hyperactivity disorder by Karande et al
8. Bjorn Adler. www.orgsites.com/wa/ourkidswithdyslexia/_pgg5.php3

सुलता शेनॉय *बाल एवं किशोर मनोवैज्ञानिक हैं। उन्होंने एम.ए., एम.फिल. तथा पी.एच.डी. उपाधियाँ बंगलौर विश्वविद्यालय से प्राप्त की हैं। सागर हॉस्पिटिल तथा परीज़मा न्यूरोडायग्नॉस्टिक्स एण्ड रिहैबिलिटेशन हॉस्पिटल में परामर्शदाता बाल मनोवैज्ञानिक होने के साथ–साथ, वे टर्निंग पॉइंट सेन्टर फॉर चाइल्ड गाइडैंस में निजी परामर्श भी देती हैं। उनकी रुचि के क्षेत्र हैंः स्कूल पूर्व शिक्षा, साधनहीन बच्चे, विकासात्मक अक्षमताएँ, विशेष शिक्षा तथा संज्ञानात्मक उपचार, खेल–चिकित्सा और व्यवहारगत मनोचिकित्सा। उनसे* sulatashenoy@hotmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

17 कागज मोड़ें,गणित सीखें

वी एस एस शास्त्री



किसी बच्ची को किसी खास तरीके से एक कागज को मोड़ने के लिए कहें तो वह पलटकर तुरन्त पूछेगी कि, ''मैं ऐसा क्यों करूँ?'' उसे यह एक बोझ, एक जबरदस्ती का काम या एक ऊबाऊ अभ्यास की तरह लगता है। लेकिन उसी बच्ची को यदि कागज को मोड़ कर एक नाव या चिड़िया बनाने के लिए कहें, और उसे थोड़ा मार्गदर्शन दे दें, तो वह तुरन्त यह करना शुरू कर देगी और खुशी–खुशी उसे सीखना चाहेगी। मॉडल को बना लेने के बाद उस लड़की को यह बताने की कोशिश करें कि उस मॉडल को खोलने के बाद वह उसमें क्या–क्या (जैसे कोण, क्षेत्र, रेखा आदि) देख सकती है। इसमें निश्चित ही एक नई चीज खोज लेने का तत्व शामिल हो जाएगा। और ऐसा होते ही यह प्रक्रिया मजेदार हो जाती है।

कागज को मोड़ना और अलग–अलग आकृतियाँ बनाना एक कला है जिसे ऑरिगामी कहते हैं। कागज के इस तरह बनाए गए कुछ मॉडलों में दस–बीस नहीं बल्कि कई सौ मोड़ होते हैं। कुछ जटिल मॉडलों में तो दो या तीन अलग–अलग मोड़ी गई आकृतियों को आपस में जोड़ना पड़ता है।

ऑरिगामी के जरिये गणित समझना नियमित संरचनाओं के संसार को देखने का एक रोमांचक अनुभव है, जो वाकई में बच्चे की आँखों के सामने 'खुलता' है। यह खोजबीन गणित की अमूर्त अवधारणाओं को एक मजेदार तरीके से स्पष्ट करने में मदद करती है। आइए हम कुछ आसान मॉडलों को देखें। इस उद्देश्य के लिए मैं उन ऑरिगामी मॉडलों को इस्तेमाल करना पसन्द करूँगा जिनमें आठ से अधिक मोड़ न हों। आसान और छोटे ऑरिगामी मॉडल गणित सीखने के लिए आदर्श होते हैं।

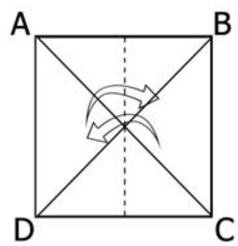
हमारे देश में ऑरिगामी एक लोक कला बन तो गई है लेकिन बड़े पैमाने पर इसका अभ्यास नहीं किया जाता। आजकल कोई बच्चों को यह नहीं सिखाता कि कागज को मोड़ कर किस प्रकार नाव, कप, चिड़िया आदि बनाई जाती हैं। यदि बच्चों को स्कूल में अपने मित्रों से यह सीखने को मिल जाए तो इसे उनका सौभाग्य समझिए।

> *''इस प्रकार यह साधारण मोर वास्तव में गणित की दस से भी अधिक अवधारणाओं की व्याख्या सुलभ कराने तक ले जाता है। गणित के पाठ्यक्रम से जुड़े इस प्रकार के कई मॉडल हैं। बच्चों द्वारा बनाए जा सकने वाले सैकड़ों सस्ते मॉडल इन अवधारणाओं को सुदृढ़ बना देंगे।''*

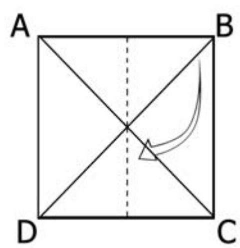
यहाँ मैं कुछ ऐसे उदाहरण दे रहा हूँ जिनमें सरल ऑरिगामी मॉडलों द्वारा दर्शाई जा सकनेवाली कुछ गणितीय अवधारणाओं को सचित्र रूप से व्यक्त किया गया है।

कागज का मोर

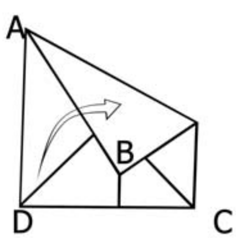
इन रेखाचित्रों का अनुसरण करते हुए एक मोर बनाएँ। आप देखेंगे कि यहाँ इस्तेमाल किए गए संकेत सरल और अपने आप समझ में आ जाने वाले हैं।



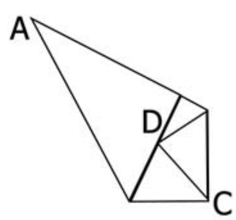
एक 10 से.मी. x 10 से.मी. के वर्गाकार कागज से शुरू करें जिसे कर्ण पर से मोड़कर उसकी धारी बना दी गई है। इसे चित्र में दिखाए ढंग से बीच में से मोड़ लें।



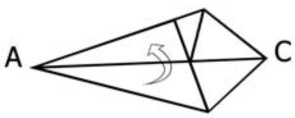
बिन्दु 'ब' को नीचे लाते हुए बीच की रेखा तक मोड़ें।



बिन्दु 'द' को ऊपर की तरफ मुड़ी हुई किनारी तक मोड़ें।



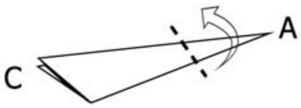
परिणामस्वरूप ऐसी आकृति बनती है।



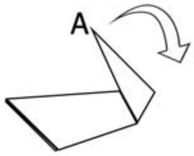
अब फिर 'अस' पर से मोड़ें।



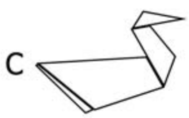
मॉडल को पूरा घुमा लें।



बिन्दु 'अ' को पीछे की ओर मोड़ें।



फिर बिन्दु 'अ' को वापिस आगे की ओर लाते हुए बीच में से मोड़ें।

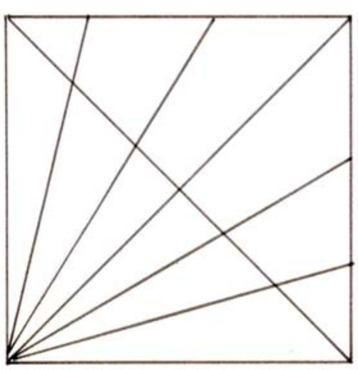


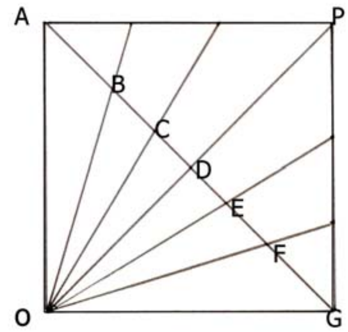
'स' को नीचे झुकाकर मोर की पूंछ बनाएँ।



मोर

एक वर्गाकार कागज को मोड़ कर मोर का मॉडल बनाने के बाद बच्ची उससे खेलने लगती है। कभी–कभी वह मॉडल को फाड़ भी सकती है। बच्ची को मॉडल को खोलने के लिए प्रोत्साहित करें ताकि कागज फिर से वर्गाकार हो जाए। लेकिन कागज में बनाए गए मोड़ अपनी धारियाँ छोड़ जाते हैं – सीधी रेखाएँ, क्षेत्र, कोण आदि। इन रेखाओं को पेंसिल फेर कर गाढ़ा कर लें। तब आप यह देखेंगे.....





यहाँ कोण ADG = 90 डिग्री है जिसे 15–15 डिग्री के छह भागों में विभाजित किया गया है। आइए हम यहाँ बननेवाले सभी कोणों को देखें। हमें यहाँ छह कोण मिलते हैं (90 के अलावा 15, 30, 45, 60, 75) और उन्हें मापने के लिए हमें चाँदे का उपयोग करने की आवश्यकता नहीं होती। यह अपने आप में ही बच्चे के लिए एक विस्मयकारी बात है। यही नमूना निम्नलिखित बातों को सचित्र रूप से स्पष्ट करने के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है

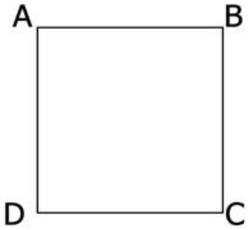
1. कोणों का विभाजन
2. अधिक और न्यून कोण
3. न्यून कोण त्रिभुज
4. अधिक कोण त्रिभुज
5. समद्विबाहु त्रिभुज
6. समबाहु त्रिभुज
7. समद्विबाहु समकोण त्रिभुज
8. त्रिभुज में तीन कोणों का योग 180 डिग्री होता है
9. त्रिभुज के आन्तरिक विपरीत कोणों का योग उसके बाह्य कोण के बराबर होता है
10. संगत कोण
11. विपरीत शीर्ष कोण

इस प्रकार यह साधारण मोर वास्तव में गणित की दस से भी अधिक अवधारणाओं की व्याख्या सुलभ कराने तक ले जाता है। गणित के पाठ्यक्रम से जुड़े इस प्रकार के कई मॉडल हैं। बच्चों द्वारा बनाए जा सकनेवाले सैकड़ों सस्ते मॉडल इन अवधारणाओं को सुदृढ़ बना देंगे।

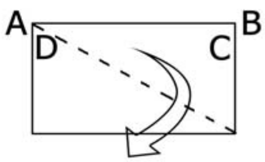
कागज को मोड़ कर सप्तभुज बनाना

एक सप्तभुज (सात भुजाओं वाला बहुभुज) बनाना बहुत कठिन होता है, क्योंकि एक नियमित सप्तभुज का आन्तरिक कोण 128.57 डिग्री होता है। यह किसी भी चाँदे द्वारा परिशुद्धता से नहीं नापा जा सकता। लेकिन आप बराबर लम्बाई की सात सींकों को उनके छोरों को सटाते हुए जमाकर, या एक कागज पर, बार–बार गलती और कोशिश की प्रक्रिया का पालन करते हुए, सात बराबर रेखाओं को खींचकर एक सप्तभुज बना सकते हैं।

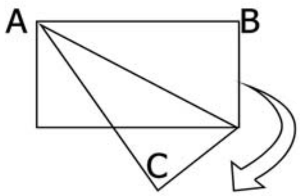
लेकिन ऑरिगामी तकनीकों का इस्तेमाल करके 128.57 डिग्री का यह कोण बड़ी आसानी से प्राप्त किया जा सकता है। एक चौकोर कागज से यह कोण प्राप्त करने के लिए चित्रों द्वारा नीचे समझाए गए चरण काफी होंगे।



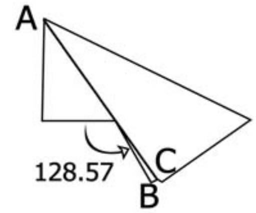
अ ब स द से चिन्हित एक वर्गाकार कागज से शुरू करें।



स द किनारी को मोड़कर अब उपर ले आएँ।



ब स बिन्दु को नीचे लाते हुए अ से शुरू होनेवाले कर्ण पर मोड़ें।



दर्शाया गया कोण 128.57 डिग्री का है।

इस प्रकार से मुड़ी हुई सात शीटों को आपस में जोड़ कर हम वास्तव में एक नियमित सप्तभुज बना सकते हैं।

भविष्य में एक ऐसे स्कूल की कल्पना करना सम्भव है जहाँ निचली कक्षाओं में ऑरिगामी को मजे के लिए सिखाया जाता हो। बच्चे एक वर्ष में आठ से दस मॉडलों को सीख सकते हैं। इन्हीं मॉडलों का इस्तेमाल करते हुए अगली कक्षा में गणित सिखाया जा सकता है। ऐसा सीखना एक बोझ नहीं लगेगा। कागज को मोड़ कर गणित सीखना ऊँची कक्षाओं में भी सम्भव है। वास्तव में कक्षा दस तक की गणित की अवधारणाओं को समझाने के लिए कर्नाटक राज्य विज्ञान परिषद, बैंगलौर ने एक किताब प्रकाशित की है जिसका शीर्षक है ''डेस्क बुक ऑन मैथेमेटिक्स थ्रू ऑरिगामी''।

ऑरिगामी

ऑरिगामी एक प्राचीन कला है जिसका जापान में अभ्यास किया जाता है। यह शब्द 'ऑरि' यानी मोड़ना और 'कामी' यानी कागज से निकला है। पुराने समय में ऑरिगामी नमूनों को कुछ धार्मिक कामों में इस्तेमाल किया जाता था। लेकिन बाद में उसे सिर्फ पूर्ण आनन्द और मजे के लिए इस्तेमाल किया जाने लगा। कहा जाता है कि कागज को मोड़ने की यह कला चीन से जापान में आई। वहाँ अन्तिम संस्कार के समय कागज की नावों को रखा जाता था ताकि वे आत्माओं को इस संसार के पार ले जाएँ।

19वीं शताब्दी में जापान में अमरीकी प्रवेश के बाद जापानी कला और शिल्प को पश्चिम में भी पहचाना जाने लगा जहाँ कागज मोड़ने की कला के लिए नया शब्द 'ऑरिगामी' गढ़ा गया। प्रारम्भ में उसे सिर्फ 'कागज की आकृतियों' की तरह जाना जाता था। उसके बाद से कागज मोड़ने की कला का तेजी से विकास हुआ। अब कई ऑरिगेमी संघ हैं और जादूगर भी अपने प्रदर्शनों में कागज मोड़ने की कला का प्रदर्शन करते हैं। विश्व भर में हर साल नियमित रूप से ऑरिगामी प्रदर्शन आयोजित किए जाते हैं। अब कम्प्यूटर के ऐसे सॉफ्टवेयर विकसित किए गए हैं जो वांछित आकृति बनाने के लिए कागज मोड़ने के निर्देशों को क्रम से दिखाते हैं।

कागज मोड़ने का काम करनेवाली कुछ अन्य संस्कृतियाँ भी रही हैं। दक्षिण स्पेन में अरब लोगों की बड़ी जनसंख्या है जिन्हें मूर कहते हैं। ये लोग इस प्रकार के शिल्प जैसे गहने बनाना, धातु का काम, पत्थर का काम आदि के अभ्यस्त होते हैं। वे इस्लाम धर्म के अनुयायी हैं। इसलिए उनकी कला में मानवीय आकृतियों की प्रधानता नहीं होती। उनकी कला रेखाओं, कोणों और ज्यामितीय डिज़ाइनों से भरपूर होती हैं। ये शिल्पकार ज्यामितीय डिजाइनों को गणित की ज्यामिति के जरिये नहीं बल्कि कागज के मोड़ने के जरिये सीखते हैं। वे संरचनाओं की पुनरावृत्ति पर या, जैसा गणित में इसे कहा जाता है, 'टैसेलेशन' पर निर्भर करते हैं। ये डिजाइनें इनके सभी शिल्पों में पुनरावृत्त होती हैं। मुगल काल में दिल्ली और आगरा में इन मूर लोगों को इमारतों को सजाने के लिए बुलाया जाता था। मुगल स्मारकों में बनाई गई खिड़कियों की महीन जाली का काम इन्हीं कलाकारों का किया हुआ है। ऑरिगामी जानकारों के बीच स्पेन की कागज मोड़ने की तकनीक मूर परम्परा के नाम से जानी जाती है।

अमेरिका के गणित के शिक्षकों की राष्ट्रीय परिषद ने अल्बर्ट विश्वविद्यालय के एक गणितज्ञ पॉल्सन को गणित और कागज के विषय पर जो कुछ उपलब्ध था उसे संकलित करने का काम सौंपा। इस गणितज्ञ ने उस समय तक प्रकाशित सभी शोधपत्रों को देखा और 60 पेजों की एक पुस्तिका लिखी जिसमें सम्बन्धित सामग्री सम्पूर्ण रूप से मौजूद थी। इसका पुनर्मुद्रित भारतीय संस्करण मैथेमेटिकल साइंस ट्रस्ट सोसाइटी, सी 766, न्यूफ्रेंडस कॉलोनी, नई दिल्ली के पास उपलब्ध है।

सुन्दर राव : भारत के अग्रदूत

सुन्दर राव 1870 में चेन्नई के रोयापेट्टा हाई स्कूल में हेड मास्टर थे। वे गणित के बहुत अच्छे शिक्षक रहे होंगे। हमें बताया गया है कि सेवानिवृत्त होने के बाद एक दिन वे एक डिपार्टमेंटल स्टोर में गए। वे अपने पोतों के लिए एक अच्छा उपहार खोज रहे थे। उन्हें एक गिफ्ट पैक मिला जिसमें रंगीन कागज और एक छोटी किताब थी, जिसमें बताया गया था कि कागजों को किस तरह मोड़ कर विभिन्न पशुओं, चिड़ियाओं आदि का आकार बनाया जा सकता है। सुन्दर राव ने गणित के शिक्षक होने के नाते इन मुड़ी हुई आकृतियों को खोलने और कागज को समतल करने के बाद उस पर बनी रेखाओं, कोणों और क्षेत्रों को देखा। जल्दी ही उन्होंने इन संरचनाओं को उन प्रमेयों, लेमों, निर्माण कार्यों आदि से जोड़ना शुरू किया जिन्हें वे अपने पूरे कार्यकाल में पढ़ाते रहे थे। सेवानिवृत्त हेड मास्टर ने कागज के मोड़ों से जो भी सम्भव हो सकता है उसे लिखना शुरू किया। उन्होंने इसमें ज्यामिति के पूरे पाठ्यक्रम को समाहित कर दिया। वे कागज मोड़ने से गणित के और तथ्यों को भी जोड़ सके। इस तरह एक अद्भुत किताब तैयार हुई जिसका नाम था ''ज्योमैट्रिक कंस्ट्रकशन्स इन पेपर फोल्डिंग'' और इसे 1893 में प्रकाशित किया गया।

यह दुनिया में अपनी तरह की पहली किताब थी और दुनिया भर के गणित शिक्षकों और अध्यापकों का ध्यान इसने अपनी ओर खींचा। अमेरिका के गणित शिक्षक संघ को इस किताब के बारे में जर्मनी की एक पत्रिका में छपी टिप्पणी के जरिये पता चला। उन्होंने दो मशहूर गणित शिक्षकों को इस किताब को अमेरिका के पाठकों के लिए उपयुक्त बनाने के लिए उसका सम्पादन करने की जिम्मेदारी सौंपी। इस सम्पादित संस्करण का 47 बार प्रकाशन हुआ और आज भी दुनिया भर में इसे बार–बार छापा जा रहा है। लेकिन इस मौलिक पुस्तक के बारे में भारत में कोई जानकारी नहीं है – जहाँ के बच्चों के लिए सुन्दर राव ने सबसे पहले इसे प्रकाशित किया था। जिन लोगों को इस पुस्तक में दिलचस्पी हो वे इसे मुफ्त में www.arvindguptatoys.com वेबसाइट से डाउनलोड कर सकते हैं।

वीएसएस शास्त्री *एक बैंक अधिकारी हैं। उनकी गणित में गहरी दिलचस्पी है। उन्होंने गणित और उससे सम्बद्ध गतिविधियों पर बच्चों के लिए 12 पुस्तकें लिखी हैं। उनकी पुस्तक ''ऑरिगामी फन एण्ड मैथेमेटिक्स'' (जो तीसरी बार मुद्रित हुई है) नई दिल्ली के विज्ञान प्रसार ने प्रकाशित की है। इसमें दसवीं कक्षा तक गणित पढ़ाने के लिए कागजों की विभिन्न आकृतियों की जानकारी दी गई है। उन्होंने शिक्षकों के लिए 300 से अधिक कार्यशालाओं का आयोजन किया है। एरो मॉडलिंग, किरिगामी और पतंगें उनकी दिलचस्पी के अन्य विषय हैं। उनसे* vsssastry@gmail.com *ईमेल पते पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

● ● ●

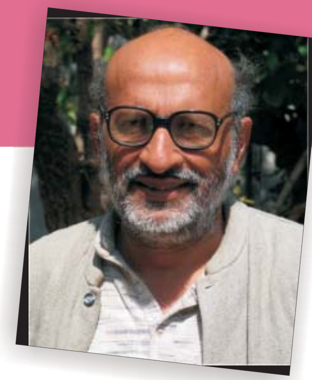
तर्क–गणित की दिमागी कसरतें

अजय नदी पर पानी लेने के लिए गया। उसके पास दो बाल्टियाँ हैं इन में से एक की क्षमता 11 लीटर पानी की है तथा दूसरी की 6 लीटर। समस्या यह है कि अजय को कुल 4 लीटर पानी लेकर आना है। इस समस्या का समाधान करने के लिए अजय की मदद कीजिए।

इस स्थान का उपयोग गणना हेतु करें। 🙂

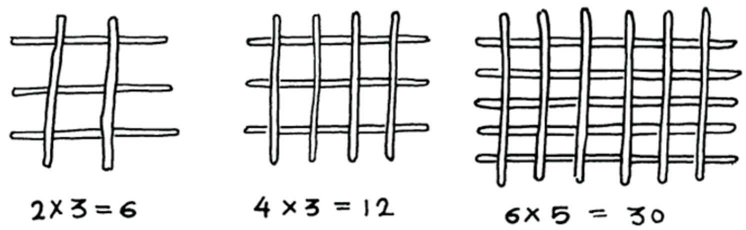
18 झाड़ू की सींक से पहाड़े

अरविन्द गुप्ता



यह गतिविधि चेन्नई के श्री पी के श्रीनिवासन के अद्भुत काम से प्रेरित है। पहाड़े अक्सर रटे जाते हैं। यह जरूरत पड़ने पर उनके जल्दी से याद आ जाने में तो मदद कर सकता है लेकिन यह सीखने का पूरा आनन्द ख़त्म कर देता है। बच्चे सींक की झाड़ू की बराबर लम्बाई की 18 सींकों से पहाड़ों के पूरे संसार को खोज सकते हैं।

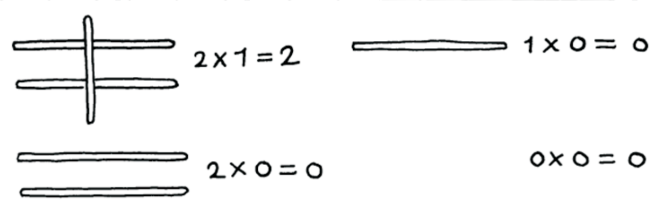
1. एक सींक को आड़ा रखें और दूसरी सींक को उसके ऊपर खड़े में काटता हुआ रखें। वे आपस में कितने बिन्दुओं पर मिलती हैं? जाहिर है एक बिन्दु पर, अतः 1 x 1 = 1। यदि तीन आड़ी रखी सींकों पर दो सींकों को खड़ा रख दिया जाए तो उनके 6 संयोजन बिन्दु होते हैं इसलिये 2 x 3=6.



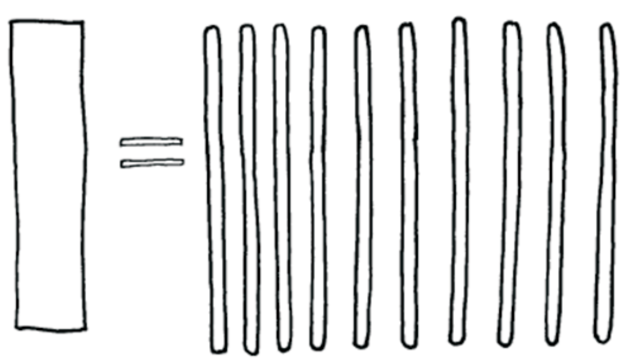
2. बच्चे चौकोर खाने की उत्तर पुस्तिका में 0–9 तक की तालिका या जाली बना सकते हैं और झाड़ू की सींकों को आड़ा–खड़ा रख कर तथा संयोजन बिन्दुओं की संख्या को गिन कर अपने स्वयं के पहाड़ों की तालिका बना सकते हैं। अतः जिन बच्चों ने गिनना सीख लिया हो उन्हें खुद पहाड़ों की अपनी तालिका बनाने के लिये प्रोत्साहित करना चाहिए।

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2			6						
3									
4			12						
5									
6					30				
7									
8									
9									

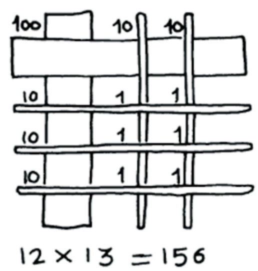
3. यह चित्र दर्शाता है कि किस प्रकार से शून्य से गुणा करने की अमूर्त अवधारणा को साकार रूप में दिखाया जा सकता है।

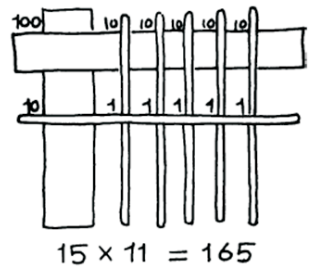


4. दो अंकों वाली संख्याओं के गुणन का मतलब होगा ढेर सारे संयोजन बिन्दुओं को गिनना। इसलिए झाड़ू की दस सींकों को एक कार्ड की पट्टी द्वारा दर्शाया जा सकता है।



5. दो पट्टियों को आड़ा–खड़ा रखने पर उनके सभी संयोजन बिन्दु 10 x 10 = 100 होंगे। जबकि एक पट्टी और झाड़ू की एक सींक रखने पर 10 x 1 = 10 संयोजन बिन्दु मिलेंगे। सभी संयोजनों बिन्दुओं की संख्याओं को जोड़ने पर गुणनफल प्राप्त हो जाएगा।





अरविन्द गुप्ता *पुणे में आईयूसीएए के चिल्ड्रन्स साइंस सेंटर में काम करते हैं। वे किताबों और खिलौनों के प्रति अपने लगाव को अपनी प्रसिद्ध वेबसाइट* http://arvindguptatoys.com *के जरिये बाँटते हैं। इस लेख में उल्लिखित किताब को ऊपर दी गई वेबसाइट से प्राप्त किया जा सकता है। उनसे* arvindguptatoys@gmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

19 उत्तरों का विश्लेषण: बच्चों को उनके सन्दर्भ ढाँचे से समझना

अभिषेक एस. राठौर और फाल्गुनी सारंगी





बहुधा हम 'सही' और 'गलत' की धारणा से इतने सम्मोहित होते हैं कि किसी बच्चे द्वारा दिए गए उत्तर के पीछे छिपे कारण की खोजबीन करना भूल जाते हैं या यूँ कहें कि इससे इंकार कर देते हैं। हम उत्तर के 'गलत होने' में ही इतने उलझ जाते हैं कि उत्तर के सौन्दर्य को सराहने से चूक जाते हैं। अभी तक हम बच्चों के कार्यों का जिस तरह से 'मूल्यांकन' करते आए हैं, उसके बजाय यह शोधपत्र बच्चों के उत्तरों को देखने का एक अधिक तर्कसंगत ढंग प्रस्तुत करने का प्रयास करता है। यह एक ऐसा दृष्टिकोण निर्मित करने का प्रयास है जिसका आधार यह जानना होगा कि बच्चे ने क्या सीखा है, न कि यह कि उसने क्या नहीं सीखा। हम इस तथ्य को भी स्वीकार करते हैं कि हम कभी भी निश्चित रूप से यह नहीं जान सकते कि किसी बच्चे ने कोई अवधारणा कैसे समझी है, क्योंकि हमारे निष्कर्ष उपलब्ध साक्ष्यों के आधार पर लगाये गए कुछ शिक्षित अनुमानों पर आधारित हैं। इस प्रयास में हमारी मान्यता है कि बच्चों के उत्तरों के मूल्यांकन के सभी स्वरूपों में कुछ निदानात्मक जानकारी निहित रहती है।

उत्तरों के विश्लेषण की हमारी समझ बच्चों की 1500 उत्तर पुस्तिकाओं पर किए गए एक आन्तरिक अध्ययन का नतीजा है। हम आशा करते हैं कि ऐसी प्रक्रिया से शिक्षकों को प्रेरणा मिलना चाहिए। इस प्रक्रिया का किसी सक्रिय कक्षा के सीखने–सिखाने के वातावरण में निश्चित रूप से सार्थक योगदान होना चाहिए। शोधपत्र के इस संस्करण में हमने अध्ययन के नतीजों को एक तरफ रखते हुए अपने को केवल उत्तरों के विश्लेषण की अवधारणा तक सीमित रखा है।

पृष्ठभूमि

इस बात पर आम सहमति है कि वर्तमान शिक्षा व्यवस्था परीक्षा को लक्ष्य मानकर चलती है। इसका प्रभाव बोर्ड परीक्षा से लेकर नीचे तक की सभी कक्षाओं पर पड़ता है। ये परीक्षाएँ मुख्य रूप से पाठ्यक्रम की विषयवस्तु पर आधारित होती हैं और केवल बच्चे की तथ्यों को याद करने और अवधारणाओं को याददाश्त से तुरन्त निकाल पाने की क्षमता को जाँचती हैं। वे इन अवधारणाओं की समझ और उनका उपयोग कर पाने की क्षमता की जाँच नहीं करतीं। परीक्षा व्यवस्था में सुधारों की जरूरत है और सरकार धीरे–धीरे यह करने का प्रयास कर रही है।

शिक्षा से सम्बद्ध सभी पक्ष परीक्षाओं और मूल्यांकन को जो महत्व देते हैं उसे देखते हुए बेहतर मूल्यांकन के लिए किए जाने वाले शैक्षणिक सुधार अति महत्वपूर्ण हैं। परीक्षा के पाठ्यपुस्तक, या रटे हुए स्मृति ज्ञान पर आधारित होने के बजाय बच्चों के ज्ञान के परीक्षण को योग्यता–आधारित बनाने की दिशा में परिवर्तन किया जाना आज नितान्त आवश्यक हो गया है।

अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन के एक मूल्यांकन–उन्मुख शिक्षा सुधार कार्यक्रम, लर्निंग गारण्टी प्रोग्राम का लक्ष्य है: मूल्यांकन के उपकरणों और प्रचलनों में वांछित परिवर्तनों के द्वारा कक्षा की पढ़ाने–सीखने की प्रक्रियाओं को बदलना। लर्निंग गारण्टी प्रोग्राम में हमने बच्चों के उत्तरों को देखने के तरीके को बदलने की कोशिश की है। हमने बच्चों के काम का 'मूल्यांकन' करते समय एक ज्यादा तर्कसंगत तरीका उपयोग करने का प्रयास किया। हम यह दावा नहीं करते कि ऐसा प्रयास पहली बार किया जा रहा है, पर हमें यह जरूर लगता है कि इस क्षेत्र में काम करने वालों ने इस पहलू पर समुचित ध्यान नहीं दिया है।

> *"किसी विशेष उत्तर के कारणों की खोजबीन करना जरूरी है ताकि आगे की कोई कार्ययोजना बनाने के लिए यह ठीक से तय किया जा सके कि "बच्चे ने क्या सीखा है"। याद रखें, जानकारी पर आधारित शिक्षित अनुमान कोरे अनुमान से, और हिसाब किताब लगाकर उठाया गया जोखिम कोरे जोखिम से बेहतर होता है।"*

उत्तरों के विश्लेषण की अवधारणात्मक समझ निर्मित करना

मूल्यांकन बच्चों के सीखे गए ज्ञान का वर्तमान स्तर जानने के लिए एक निरन्तर चलने वाली प्रक्रिया है। इसे करने वाले लोग मोटे तौर पर इसके दो प्रकार मानते हैं:

1. निर्माणात्मक या निरन्तर चलने वाला, तथा
2. योगात्मक या शैक्षणिक सत्र के समापन वाला।

मूल्यांकन के दौरान हम कुछ चीजों/प्रश्नों के बच्चों द्वारा दिए गए उत्तरों से उनके ज्ञान के स्तरों को स्पष्ट रूप से जानने का प्रयास करते हैं। अक्सर बच्चों के ये उत्तर 'सही' और 'गलत', और कभी–कभार 'बीच में' के खानों में वर्गीकृत कर दिए जाते हैं। इससे हम निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि जिन बच्चों ने जिस चीज का सही उत्तर दिया है उन्होंने उससे सम्बन्धित योग्यता हासिल कर ली है, और जिन्होंने सही उत्तर नहीं दिया है वे उस योग्यता को हासिल नहीं कर पाए हैं। ऐसे निष्कर्ष प्रायः मूल्यांकन के प्रयोजन को तुच्छ बना देते हैं और उनसे बच्चे के ज्ञान के बारे में यदि कोई अन्तर्दृष्टियाँ प्राप्त होती भी हैं तो वे आधी–अधूरी होती हैं। अब हम एक उदाहरण की सहायता से इसकी और अधिक जाँच–पड़ताल करने की कोशिश करेंगेः

प्र. हल करें

$$\begin{array}{r} 21 \\ \underline{-17} \end{array}$$

उः 16

सामान्य निष्कर्ष – बच्चे को हासिल उधार लेकर दो अंकों वाली संख्याओं के घटाने की समझ नहीं है। कार्ययोजना बच्चे के साथ इसका फिर से अभ्यास करने की जरूरत होगी।

इस निष्कर्ष और इस कार्ययोजना के बारे में कुछ विचारः

- यह निष्कर्ष जो बच्चे ने नहीं सीखा है उसे स्पष्ट करता है, बजाय यह बताने के कि उसने क्या सीखा है। अतः यह अधूरी जानकारी है। इसलिए यदि हम बच्चे के साथ काम शुरू करना चाहते हैं तो एक अच्छा प्रारम्भिक बिन्दु क्या होगा?
- उपरोक्त निष्कर्ष निकालने के पहले हमने इस बात की जाँच नहीं की कि बच्चा यह गलती क्यों कर रहा है। इससे हो सकता है कि हमारे आगे की कार्ययोजना का नक्शा ही गलत हो जाए, क्योंकि हम नहीं जानते हैं कि समस्या घटाने की अवधारणा में है या किसी और बात में?

यदि हम बच्चे के उत्तर की आगे और खोजबीन करना चाहते हैं तो हमें विश्लेषण के स्तर को उत्तर को सिर्फ 'गलत' या 'सही' मान लेने से ऊपर उठाना होगा। (मूल्यांकन के किसी भी स्वरूप में) किसी निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए एक ऐसा तर्कसंगत आधार होना जरूरी है जो, बच्चे ने क्या नहीं सीखा के बजाय, उसने क्या सीखा है इस पर विशेष रूप से जोर देता हो। अपने प्रारम्भिक उदाहरण पर वापस लौटेंः

प्र. हल करें–

$$\begin{array}{r} 21 \\ \underline{-17} \end{array}$$

उ. 16

सबसे पहले तो हम इस उत्तर से कुछ जानकारी एकत्रित करेंः

जानकारीः

1. इकाई के स्थान पर, बच्चा संख्याओं को उलटे क्रम में घटा रहा है (7–1 = 6)
2. दहाई के स्थान पर, बच्चे के सन्दर्भ ढाँचे से देखते हुए गणना सही है और उसने कोई गलती नहीं की है।

विश्लेषण बिन्दु : बच्चे ने क्या सीखा है?

1. बच्चे ने घटाने की अवधारणा की प्रथम स्तर की समझ हासिल कर ली है क्योंकि उसकी गणनाएँ सही हैं।
2. हो सकता है कि बच्चे ने एक अंक की संख्याओं के सवालों के सम्बन्ध में जो नियम सीखा है – अर्थात, हम हमेशा बड़ी संख्या में से छोटी संख्या को घटाते हैं, उदाहरण के लिए 7–1 = 6 उसका व्यापकीकरण करके उसने उसे दो अंकों वाली संख्याओं पर लागू कर दिया है।

विश्लेषण बिन्दु : बच्चे ने क्या नहीं सीखा है?

1. उसके व्यापकीकरण से आप देख सकते हैं कि बच्चा 'अंक' और 'संख्या' में भेद नहीं कर पा रहा है।
2. इसलिए स्थानीय मान की अवधारणा पर ध्यान दिए जाने की जरूरत है।

इस सीमित उपलब्ध जानकारी के आधार पर हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि घटाने की प्रक्रिया के बजाय हमें इस बच्चे के साथ सबसे पहले स्थानीय मान, संख्याओं और अंकों की अवधारणाएँ निर्मित करने की दिशा में प्रयास करने की आवश्यकता है।

एक और उदाहरण लेते हैंः

प्र. निम्नलिखित संख्याओं को बढ़ते क्रम में जमाएँ–

121, 222, 117

उ. 117, 222, 121

उपलब्ध जानकारी – संख्याओं को गलत क्रम में जमाया गया है।

कुछ महत्वपूर्ण विश्लेषण बिन्दु :

1. बच्चा तीन अंकों की संख्याओं को बढ़ते क्रम में व्यवस्थित नहीं कर पाता, पर कौन जानता है, शायद वह दो अंकों की संख्याओं को जमा सकता हो?
2. यह भी सम्भव है कि बच्चा 'बढ़ते क्रम' का अर्थ न समझता हो। यदि हमने सवाल को 'छोटी संख्या से बड़ी के क्रम में',

कह कर पेश किया होता तो हो सकता है कि उसने इसे हल कर लिया होता।

3. किसे पता है कि यह बच्चा तीन अंकों की संख्याओं को ठीक से पहचान भी सकता है या नहीं?

यह भी सम्भव है कि उसने संख्याओं को व्यवस्थित क्रम में लगाने की कोई समझ ही विकसित नहीं की हो।

कुछ और विश्लेषण

इन सभी विश्लेषण बिन्दुओं को देखकर हम किसी निष्कर्ष पर नहीं पहुँच पाते। तो फिर इस बच्चे के साथ हम कहाँ से काम शुरू करें? इसका आशय यह है कि हमारे पास सीमित जानकारी है। अतः कोई भी निष्कर्ष निकालने के लिए हमें और अधिक जानकारी इकट्ठी करने की आवश्यकता है। उदाहरण के लिए, अब हम मौखिक मूल्यांकन के दौरान प्राप्त की गई जानकारी से इसका सम्बन्ध जोड़ते हैं, यही बच्चा किसी भी तीन अंकों की संख्या को सही–सही नहीं पहचान पाया। लेकिन फिर भी कुछ प्रश्न हैं जो अनुत्तरित रह जाते हैं: जैसे, ''क्या वह दो अंकों की संख्याओं को पहचान सकता है ? क्या वह दो अंकों की दो संख्याओं की तुलना कर सकता है? क्या वह संख्याओं को क्रमबद्ध ढंग से व्यवस्थित कर सकता है?'' यहाँ महत्वपूर्ण बात यह है कि किसी खास योग्यता की दृष्टि से किसी बच्चे के ज्ञान के वर्तमान स्तर का विश्लेषण करने के लिए हमें एक से अधिक उत्तरों की जरूरत पड़ेगी।

उपरोक्त दोनों उदाहरणों को शामिल करते हुए, बच्चे के सीखे गए ज्ञान के मूल्यांकन को सार रूप में इस तरह से व्यक्त किया जा सकता है :

1. किसी बच्चे के ज्ञान के सम्बन्ध में किसी निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए हमें एक से अधिक उत्तरों का विश्लेषण करना जरूरी है। इसलिए हमें साथ ही साथ, अवधारणाओं के उत्तरोत्तर क्रम में, इनसे जुड़ी बातों के प्रति उत्तरों को देखने की आवश्यकता होती है। (अगले खण्ड में हम जुड़ी हुई बातों की विस्तार से बात करेंगे।)
2. किसी विशेष उत्तर के कारणों की खोजबीन करना जरूरी है ताकि आगे की कोई कार्ययोजना बनाने के लिए यह ठीक से तय किया जा सके कि ''बच्चे ने क्या सीखा है''। याद रखें, जानकारी पर आधारित शिक्षित अनुमान कोरे अनुमान से, और हिसाब–किताब लगाकर उठाया गया जोखिम कोरे जोखिम से बेहतर होता है।
3. किसी बच्चे का हर उत्तर ऐसी कुछ निदानात्मक जानकारी प्रदान करता है जिसके आधार पर आगे कार्य किया जा सकता है, भले ही वह जानकारी कितनी ही असम्बन्धित प्रतीत हो।

जुड़ी हुई चीजें समझने का एक प्रयास

यहाँ कोई नया उदाहरण लेने के बजाय परिचित सन्दर्भ ढाँचे का इस्तेमाल करना समझदारी की बात होगी। अतः हमने यहाँ बढ़ते क्रम से सम्बन्धित सवाल की ही चर्चा की है।

प्र. निम्नलिखित संख्याओं को बढ़ते क्रम में जमाएँ
121, 222, 117
उ. 117, 222, 121

सम्भावित जुड़ी हुई बातें:

प्र. निम्नलिखित संख्याओं के बीच <,> में से उचित चिन्ह लगाएँ–
प्र 943 > 934
उ. 498 < 589

प्र. इनमें सबसे छोटी तीन अंकों की संख्या को रेखाँकित करें–
1000, 699, 969
उ. 699

प्र. इन संख्याओं को बड़ी से छोटी के क्रम में लगाएँ।

24,32,16
उ. 16,24,32

पहले संख्याओं को छोटी से बड़ी के क्रम में लगाया जा रहा था, अब उन्हें उलटे क्रम में लगाना है। यहाँ पाठक दोनों में अन्तर देख सकते हैं।

यह दृष्टिकोण किसके लिए उपयोगी है?

यह दृष्टिकोण शिक्षकों और मूल्यांकन करने वालों को उनकी कक्षा में पढ़ाने और सीखने की प्रक्रियाओं पर अधिक तर्कसंगत ढंग से विचार करने में समर्थ बनाएगा। यह मूल्यांकन करने वालों को एक ऐसी प्रक्रिया प्रदान करता है जो बच्चों के सीखे गए ज्ञान के स्तर को समुचित रूप से आँक सकती है। लेकिन इस बारे में एक शंका उठाई जा सकती है : ''किसी शिक्षक के लिए 60 उत्तर पुस्तिकाओं का इस तरह विश्लेषण कर पाना कैसे सम्भव है?'' यहाँ यह समझने की जरूरत है कि उत्तरों का विश्लेषण एक दृष्टिकोण, या विचार करने का एक तरीका है, और एक बारगी जब कोई शिक्षक यह दृष्टिकोण निर्मित कर लेता है तो फिर वह सिर्फ लिखित परीक्षा के आधार–उपकरणों पर निर्भर नहीं रहता। उसकी समझ कक्षा में होने वाली प्रक्रियाओं में भीतर तक प्रवेश कर जाएगी। सीखने का मूल्यांकन करने के लिए सावधानीपूर्वक रचे गए कुछ प्रश्न/बातें मौखिक रूप से पूछी जा सकती हैं, या कक्षा की दैनिक गतिविधियों के दौरान कुछ खेल खेले जा सकते हैं। लेकिन पूछी जाने वाली ऐसी किसी भी खास बात या खेल में यह दृष्टिकोण प्रतिबिम्बित होगा।

यहाँ एक और उदाहरण प्रस्तुत है : एक शिक्षक यह जाँचने का प्रयास कर रहा है कि क्या कक्षा 1 के बच्चे संख्याओं (प्रतीकात्मक निरूपण 10, 11, 12...) तथा 10 से 20 स्थूल वस्तुओं के बीच सम्बन्ध जोड़ना सीख गए हैं या नहीं। अतः वह एक खेल की रचना करता है (यह मान लेते हैं कि कक्षा 1 में 40 बच्चे हैं)। बच्चों को दो समूहों में बाँट दिया जाता है (प्रत्येक में 20)।

समूह 1 के पास 1 से 20 तक अंकित फ्लैश (झट से दिखाए जाने वाले) कार्ड होंगे और समूह 2 के प्रत्येक सदस्य के पास कंकड़ होंगे।

निर्धारित कार्य है : समूह 1 कोई कार्ड दिखाता है और समूह 2 के सभी सदस्यों को अलग–अलग उतने ही कंकड़ दिखाना है (इस कार्य को उलटे ढंग से भी किया जा सकता है)। उत्तरों के विश्लेषण वाले दृष्टिकोण से सम्पन्न शिक्षक 1 से 20 तक के सभी कार्ड एक साथ शुरुआत में ही समूह 1 को नहीं दे देगा। वह उन्हें अपनी इच्छानुसार चरणबद्ध ढंग से देगा – शायद 5–5 के समूहों में। हो सकता है कि 6 से 10 तक के कार्ड पहले दिखाए जाएँ, फिर 11 से 15 तक के और फिर 5 के बाकी समूहों के कार्ड। इस तरह शिक्षक को यह देखने में और पहचानने में मदद मिलेगी कि कौन (और कितने) बच्चे 5 तक की संख्याएँ पहचान सकते हैं, कौन 10 तक पहचान सकते हैं, और इसी प्रकार आगे भी।

बच्चों को संख्याएँ पहचानना सिखाने के लिए यह खेल एक बहुत अच्छी गतिविधि है। यहाँ यदि आप, कुछ संशोधनों के साथ, समूह 1 को सभी 20 कार्ड एक साथ भी दे दें तो भी इस गतिविधि में से मूल्यांकन का तत्व प्रगट हो जाएगा। प्रक्रिया विधि में यह परिवर्तन दृष्टिकोण में बदलाव दर्शाता है। इस सबसे शिक्षक तार्किक ढंग से जानकारी के आधार पर विचार करने में सक्षम हो जाता है। यह शिक्षक को कक्षा की प्रक्रियाओं, जिनमें खुद भी मूल्यांकन के तत्व शामिल रहते हैं, के बारे में भी गहराई से सोचने में समर्थ बनाएगा।

उपकरण प्रश्नपत्र विकसित करने वालों के लिए (जो अन्ततः मूल्यांकन करने वाले हैं) – इन प्रक्रियाओं की समझ परीक्षा के उपकरणों की गुणवत्ता में सुधार कर सकती है और उनकी प्रति को अधिक निदानात्मक बना सकती है। ऐसे किसी उपकरण के कक्षा में व्यावहारिक परीक्षण और फिर उत्तरों के विश्लेषण से मूल्यांकन करने वालों को और बेहतर उपकरण रचने में मदद मिलेगी, क्योंकि ऐसा विश्लेषण केवल ''निदानात्मक उपकरणों'' में कारगर होता है। आइये हम इसे समझने का प्रयास करें –

नीचे निदानात्मक एवं कम निदानात्मक सवालों के अलग–अलग समूह दिए गए हैं।

क्रम	परीक्षित योग्यता (कक्षा 1)	निदानात्मक	कम निदानात्मक
1.	20 से 50 तक गिनना।	प्र. बच्चे के सामने 10 कंकड़ रखें और उससे उनको गिनने के लिए कहें। यदि बच्चा उनकी सही गिनती करता है तो इस समूह में 25 कंकड़ और जोड़ दें, और बच्चे से फिर से उन्हें गिनने को कहें।	प्र. बच्चे के सामने 35 कंकड़ रखें और उससे उन्हें गिनने को कहें।
2.	दो अंकों की संख्याओं को पहचानना और उनको जानना।	प्र. फ्लैशकार्डों की मदद से बच्चों को निम्नलिखित संख्याएँ दिखाएँ और उन्हें पहचानने को कहें: 21, 52, 8	प्र. फ्लैशकार्डों की मदद से बच्चों को निम्नलिखित संख्याएँ दिखाएँ और उन्हें पहचानने को कहें: 21, 52, 62
3.	दो अंकों की संख्याओं को बढ़ते हुए या घटते हुए क्रम में व्यवस्थित करना।	प्र 1. निम्नलिखित में से सबसे बड़ी संख्या को गोला बनाकर चिन्हित करें : 25, 52, 39 प्र 2. निम्नलिखित संख्याओं को बढ़ते हुए क्रम में जमाएँ: 7, 28, 9, 16	प्र. निम्नलिखित संख्याओं को बढ़ते हुए क्रम में जमाएँ: 25, 39, 52

यदि दोनों स्तम्भों को ध्यान से देखें तो हम पहचान सकते हैं कि एक समूह हमें बच्चों के सीखे हुए ज्ञान का स्तर आँकने के लिए पर्याप्त जानकारी प्रदान करता है, जबकि दूसरा समूह इस मूल्यांकन को कुछ सीमित कर देता है। जहाँ पहले स्तम्भ (जिस 'निदानात्मक' कहा गया है) में प्रस्तुत सवालनुमा हर गतिविधि सामने बताई गई योग्यता को तो जाँच ही रही है, वह उसके ठीक पहले की योग्यता को भी समाहित करती है। उदाहरण के लिए, यदि बच्चा 20 के आगे नहीं गिन सकता, तो क्या वह कम से कम 10 तक या 20 तक गिन सकता है?

या, यदि वह दो अंकों की संख्याएँ नहीं पहचानता तो कम से कम क्या वह एक अंक की संख्याएँ पहचान सकता है?

लेकिन इसका यह मतलब नहीं है कि दूसरे समूह की प्रकृति बिलकुल भी निदानात्मक नहीं है। यह बस इतना दर्शाता है कि दूसरा समूह तुलनात्मक रूप से कम निदानात्मक है। अन्यथा तो, हर चीज में कुछ निदानात्मक जानकारी प्रदान करने की सम्भावना है, बशर्ते कि बच्चा उसे करने का प्रयास करे। इस प्रकार, मूल्यांकन के उपकरणों (सवालों/कार्यों) की संरचना में ही कई बातों का समावेश करके, बाद में विस्तृत विश्लेषण करने में लगने वाले समय और प्रयास में बचत की जा सकती है, क्योंकि मूल्यांकन के अच्छे उपकरण योग्यताओं के (परस्पर जुड़े हुए या स्पर्श करते हुए) निदान को साथ–साथ करते चलने की सुविधा प्रदान करते हैं।

संस्थाओं के लिए – कोई भी ऐसी संस्था जो कक्षा की पढ़ाने–सीखने की प्रक्रिया में गुणात्मक परिवर्तन करने की इच्छुक है, वह उत्तरों के विश्लेषण का एक औजार की तरह उपयोग कर सकती है।

''टिप्पणी – यहाँ प्रस्तुत दृष्टिकोण कक्षा की पढ़ाने–सीखने की प्रक्रिया में सुधार करने के लिए इकट्ठे किए गए संस्थागत पढ़ाई के स्वरूपों और अनुभवों का परिणाम है। यद्यपि यह दृष्टिकोण नया नहीं है, पर मूल्यांकन करने वालों के द्वारा इसको अधिक नहीं परखा गया है, और इसका अनुसरण किए जाने पर पढ़ाने वालों तथा सीखने वालों, दोनों को ही लाभान्वित होना चाहिए।''

फाल्गुनी सारंगी *पिछले लगभग पाँच वर्षों से अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन के मूल्यांकन और शिक्षक–सहयोग के लिए गठित प्रोग्राम्स टीम के साथ काम कर रहे हैं। उन्होंने सेण्ट्रल इंस्टीट्यूट ऑफ ऐजुकेशन, फैकल्टी ऑफ ऐजुकेशन, दिल्ली विश्वविद्यालय से स्नातकोत्तर उपाधि अर्जित की है। उनसे* falguni@azimpremjifoundation.org *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

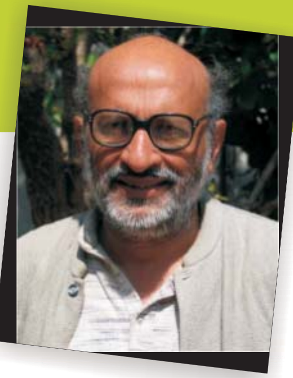
अभिषेक सिंह राठौर *पिछले लगभग चार वर्षों से अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन की प्रोग्राम्स टीम में काम कर रहे हैं। वे कम्प्यूटर की सहायता से शिक्षा, मूल्यांकन–उन्मुख सुधारों और शिक्षक–सहयोग कार्यक्रमों से घनिष्ठ रूप से सम्बद्ध रहे हैं। फाउण्डेशन से जुड़ने से पहले उन्होंने इंस्टीट्यूट ऑफ रूरल मैनेजमैंट, जयपुर से रूरल मैनेजमैंट में स्नातकोत्तर डिप्लोमा पूरा किया। उनसे* abhishek@azimpremjifoundation.org *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

खण्ड द

कुछ गणितीय अनुभव

20 गणित के प्रचारक : पी.के. श्रीनिवासन

अरविन्द गुप्ता



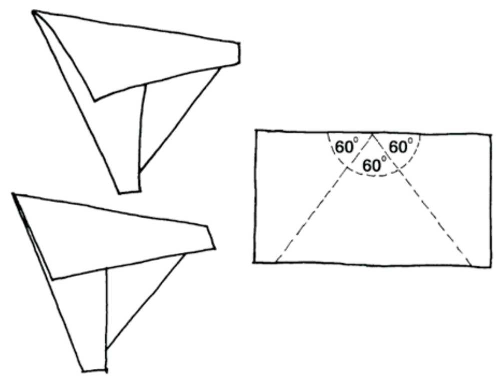
कौशल सिखाए जाते हैं
सिद्धान्त पकड़े जाते हैं
— पीकेएस

"समीप से लेकर दूर तक, मूर्त से अमूर्त तक, "यह गणित सीखने के लिए एक सटीक शैक्षणिक पद्धति है। किसी भी चीज को समझने से पहले बच्चों को उसका अनुभव होना जरूरी होता हैः चीजों को देखना, छूना, सुनना, स्वाद लेना, सूँघना, चुनना, उन्हें व्यवस्थित करना, चीजों को एक साथ रखना, चीजों को अलग–अलग करके देखना। उनके लिए असली चीजों के साथ प्रयोग करना जरूरी होता है। एक छोटे–से देश हंगरी –जिसने दुनिया को कुछ महान गणितज्ञ दिए हैं – में यही किया जाता है। टीचर टीवी वेबसाइट से मुफ्त में डाउनलोड किए जा सकने वाले इस वीडियो को देखें (http://www.teachers.tv/video/17878)।

भारत में, गणित को गतिविधियों के माध्यम से सिखाने की पद्धति के सबसे बड़े समर्थक थे पी.के. श्रीनिवासन (पीकेएस)। गणित के इस अकेले प्रचारक ने इस सबसे खूबसूरत विषय, गणित – सभी विज्ञानों की रानी – के प्रति बच्चों के मन में प्यार पैदा करने के लिए किसी भी अन्य व्यक्ति की अपेक्षा ज्यादा काम किया।

यह लेख पीकेएस को श्रद्धांजलि भी है और साथ ही इसमें आपको उनके कामों का सार भी मिलेगा।

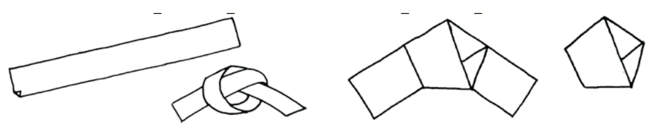
गणित पीकेएस की साँसों में था। गणित ही उनका स्वप्न था। सबसे बड़ी बात तो यह कि उनके सम्पर्क में आने वाले सभी व्यक्तियों को उनका संक्रामक उत्साह लग जाता था। मैं उनसे सबसे पहले 1986 में, श्री अरबिन्दो आश्रम, पॉडिचेरी में एनसीईआरटी द्वारा आयोजित एक कार्यशाला में मिला था। उस समय तक जेरॉक्स का चलन नहीं हुआ था, अतः पीकेएस ने साइक्लोस्टाइलिंग कागजों की गड्डी, कैंचियाँ, गोंद, पुराने अखबार और एक स्टेपलर मंगवाया। पीकेएस ने प्रत्येक शिक्षक को कागज की एक शीट दी और उनसे उस कागज को मोड़ देकर साठ डिग्री का कोण बनाने को कहा। शिक्षक तो हक्के–बक्के रह गए। उन्हें तो केवल चाँदे से कोण बनाने की शिक्षा मिली थी। उन्हें किसी अन्य ढंग से कोण बनाने नहीं आते थे। 15 मिनिट के संघर्ष के बाद उन्होंने कोशिश बन्द कर दी। इसके बाद पीकेएस ने एक सीधी किनारी (180 डिग्री) को 3 बराबर के मोड़ों में बाँटकर ठीक 60 डिग्री का कोण बना दिया। शिक्षक अचम्भित रह गए! यह किसी रहस्योद्घाटन से कम नहीं था – एकदम मनोहरी और सुन्दर। उन्होंने आधा दर्जन अलग–अलग तरीकों से कागज को मोड़ देकर 60 डिग्री के कोण बनाकर दिखाए। उदाहरण के लिए, एक पट्टी को पहले तीन बराबर भागों में मोड़ें और फिर एक त्रिभुज के आकार में मोड़ दें। इस समबाहु त्रिभुज के सभी कोण निश्चित ही 60 डिग्री के होंगे।



पूरे दिन सारे शिक्षकों ने कागजों को मोड़ दे देकर ज्यामितीय आकृतियाँ बनाईं समचतुर्भुज, षटकोण, अष्टभुज आदि। पर आप पंचभुज/पंचकोण को मोड़ देकर कैसे बना सकते हैं? कागज मोड़ना तो अपने आप में होता ही द्वि–आधारी (दो भागों वाला) है। कागज को मोड़ते–दोहराते हुए आप 2, 4, 8, 16, 32, 64 ... परतें बनाते चलते हैं। क्या ये सभी द्वि–आधारी संख्याएँ नहीं हैं? पर कोई कागज को मोड़ देकर एक पंचकोण कैसे बना सकता है? यह थोड़ा पेचीदा है, लेकिन आसान भी है। 1883 में, एक भारतीय

> *"गणित को, बच्चों को तार्किक ढंग से सोचने, बहस करने, विश्लेषण करने और अपनी बात कहने हेतु प्रशिक्षित करने के वाहन के रूप में देखा जाना चाहिए। एक विशिष्ट विषय होने के अलावा इसे विश्लेषण और तर्क से जुड़े किसी भी विषय का सहवर्ती विषय माना जाना चाहिए।" यहाँ मापन, मात्रा निर्धारण और संख्याओं के बारे में एक शब्द भी नहीं कहा गया है !*

गणितज्ञ टी. सुन्दर राव ने अपनी किताब सम जिओमैट्रिक ऐक्ससर्साइज़िज़ इन पेपर फोल्डिंग (जो डोवर प्रकाशन द्वारा अभी भी प्रकाशित की जा रही है और जो शायद ऑरीगामी व गणित पर दुनिया की पहली किताब है) में इसे करके दिखाया है। कैसे? ए–4 आकार के कागज में से 3 से.मी. चौड़ी लम्बी पट्टी काटें और बस उसमें एक गाँठ लगा दें! गाँठ को चपटा कर दें और फिर लम्बे सिरों को काटकर पंचकोण की एक आम आकृति प्राप्त करें। कितनी बार हमने गाँठे लगाने के बाद इस पर ध्यान दिया है?



उस कार्यशाला में शिक्षकों ने 80 से ज्यादा आकृतियाँ मोड़ देकर बनाईं, कुछ द्विआयामी और बाकी त्रिआयामी। सभी द्विआयामी आकृतियाँ एक अखबार को स्टेपल (पिन से जोड़कर) करके बनाई गई कामचलाऊ फाइल में चिपका दी गईं। उन्होंने एक चौकोर कागज को मोड़ देकर दर्जन भर कोणों वाला एक चाँदा भी बना लिया। शिक्षकों के उल्लास का तो ठिकाना न रहा। उन्होंने सम्भवतः उन दो दिनों में इतनी प्रायोगिक ज्यामिति सीख ली जितनी उन्होंने अपने 2–वर्षीय बीएड कोर्स में नहीं सीखी थी!

इससे हम बहस के मुद्दे पर आते हैं – स्कूली गणित का वास्तविक जिन्दगी से कितना कम वास्ता है। प्रारम्भिक गणित दर्जियों और कसेरों के कामों से विकसित हुआ – ये सभी व्यावहारिक कौशल वाले लोग हैं। गणित की व्यावहारिक जीवन में गहरी जड़ें हैं। गणित की तो शब्दावली ही उसके व्यावहारिक अतीत के सम्बन्धों से भरी हुई है। उदाहरण के लिए, यह शब्द ''स्ट्रेट लाइन'' (सीधी रेखा) देखें। यह लैटिन शब्द ''स्ट्रैच्ड लिनेन'' (ताना गया धागा) से निकलता है। जैसे कि कोई भी किसान जो आलू उगाना चाहता है बस एक सुतली तान कर बाँध देगा जिसकी मदद से वह सीधी रेखा में अपनी फसल बो सके। कोई मिस्त्री भी सीधी रेखा में ईंटें लगाने के लिए बस एक सुतली तान देगा। अतः समय के साथ ''स्ट्रैच्ड लिनेन'' धीरे–धीरे ''स्ट्रेट लाइन'' हो गया। 1 से 10 तक के ''अंक'', जिन्हें हम इतना ज्यादा इस्तेमाल करते हैं, उँगलियों – हमारे हाथों की दस छोटी–छोटी उँगलियाँ – के लिए इस्तेमाल होने वाले लातिनी शब्दों से निकले हैं।

आज स्कूली गणित वास्तविक दुनिया से पूरी तरह कट गया है। पूरा पाठ्यक्रम व्यावसायिक गणित की अर्थहीन रहस्यमयी बकवास के बोझ से लदा हुआ प्रतीत होता है। इस पूरी प्रक्रिया में गणित की समस्त सुन्दरता और उसका मजा दफन हो गया है। जिस भयानक ढंग से स्कूलों में गणित पढ़ाया जाता है उससे बच्चों में इस अद्भुत विषय के प्रति जीवन भर के लिए अरुचि पैदा हो जाती है। बच्चे गणित की खूबसूरती को देख पाएँ, उसे सराह पाएँ, इसके लिए अनिवार्य है कि बच्चों को प्रायोगिक कार्यों के माध्यम से गणित से परिचित होने का मौका दिया जाए।

पीकेएस गणित को जीवन्त बनाने के लिए संघर्ष करते रहे। वे रोये, विलाप किया और सभी लोगों से अनुरोध करते हुए यह तर्क दिया कि गणित सभी के चारों ओर व्याप्त है। और जब किसी ने उनकी बात नहीं सुनी तो उन्होंने द हिन्दू में करीब 60 लेखों की एक शृंखला लिखी जो शास्त्र के समान हैं। उन्होंने दर्शाया कि गणित सिक्कों में है, झाड़ुओं में है, माचिस की डिबिया में है, चौकोर कॉपी में है, बस के टिकिटों में है, कैलेण्डर में है और हमारे आसपास की हर साधारण चीज में गणित है। काफी संघर्ष के बाद एनसीईआरटी ने ये लेख संग्रहीत करके ''रिसोर्स मैटीरियल फॉर मैथेमैटिक्स क्लब ऐक्टिविटीज'' नामक किताब में प्रकाशित किए। यह शानदार किताब – सम्भवतः भारत में प्रकाशित और रची गई गणित की महानतम गतिविधि– पुस्तक – इस वेबलिंक से मुफ्त में डाउनलोड की जा सकती है: (http://gyanpedia.in/tft/Resources/books/pkshindu.pdf)। लगभग एक दशक तक इसका प्रकाशन बन्द रहने के बाद अब इस किताब को एनसीईआरटी द्वारा पुनर्प्रकाशित किया गया है।

> *'' पूरा पाठ्यक्रम व्यावसायिक गणित की अर्थहीन रहस्यमयी बकवास के बोझ से लदा हुआ प्रतीत होता है। इस पूरी प्रक्रिया में गणित की समस्त सुन्दरता और उसका मजा दफन हो गया है। जिस भयानक ढंग से स्कूलों में गणित पढ़ाई जाती है उससे बच्चों में इस अद्भुत विषय के प्रति जीवन भर के लिए अरुचि पैदा हो जाती है।''*

पीकेएस हमेशा ही इतने भाग्यशाली नहीं रहे। सत्तर के दशक में उन्होंने दो अद्भुत किताबें लिखीं थीं नम्बर फन विथ द कैलेण्डर और रॉम्पिंग इन नम्बरलैंड । वे एक जगह से दूसरी जगह, एक प्रकाशक से दूसरे प्रकाशक तक भटकते रहे पर उन्हें कहीं सफलता नहीं मिली। प्रकाशक चाहते थे कि वे हाईस्कूल के लिए

गणित की कुँजी लिखें जिसका कि व्यापक स्कूली बाजार से सीधा सम्बन्ध होता है। पीकेएस ने मना कर दिया। अक्सर ही उनके सबसे बड़े शत्रु उनके ही साथी शिक्षक थे। वे छात्रों के बीच पीकेएस की लोकप्रियता से चिढ़ते थे। उनमें से कुछ ने तो षडयंत्र करके उन्हें पिटवाया भी था।

पर उनके विद्यार्थी उन्हें बहुत चाहते थे। उनमें से कुछ तो पीकेएस के पढ़ाने के प्रेरणादायी अन्दाज को कभी नहीं भूल सके। अस्सी के दशक के बीच के सालों में, लिखे जाने के पन्द्रह सालों बाद ये दो किताबें, नम्बर फन विथ द कैलेण्डर और रॉम्पिंग इन नम्बरलैंड पीकेएस के एक पूर्व छात्र ने प्रकाशित कीं जिसने चेन्नई में आइसक्रीम के व्यवसाय में अच्छा पैसा कमाया था। यह निश्चित ही गुरुदक्षिणा देने का एक बेहतरीन तरीका था। ये किताबें भी इंटरनेट से डाउनलोड की जा सकती हैं http://gyanpedia.in/fromtft/Resources/books/calender.pdf और http://gyanpedia.in/tft/Resources/ books/rompinginnumberlandeng.pdf. पर हाय, इतने सारे सरकारी संगठनों और और निजी रूप से परोपकार के काम करने वालों के बावजूद हमारे देश में अभी भी अच्छी किताबों पर दाँव लगाने वाले लोग नहीं हैं!

पीकेएस अपने भावावेगों को खुले दिल से प्रगट करते थे। नब्बे के दशक के शुरुआती सालों की बात है जब उन्होंने मुझे लिआ मिलड्रेड बिअर्डज़्ली द्वारा लिखित किताब 1001 यूज़ेज़ ऑफ द 100 स्क्वैअर्स की प्रतिलिपि भेजी। इस ऐतिहासिक किताब में बस वैसी ही चौकोर कापी का इस्तेमाल करके अद्भुत गणितीय गतिविधियाँ करने की संभावनाएँ दर्शाई गई हैं जिसका उपयोग बच्चे अपने अंकगणितीय सवाल हल करने के लिए करते हैं और जो दूरदराज के गाँवों में भी उपलब्ध होती है। यह किताब किसी रहस्योद्घाटन से कम नहीं थी। इस किताब को इस लिंक से डाउनलोड किया जा सकता है http://gyanpedia.in/tft/Resources/books/squaresall.pdf .

अपनी पूरी जिन्दगी पीकेएस व्यावसायिक लाभों से दूर ही रहे। उन्होंने बड़े उदार मन से अपनी किताब ''मैनुअल फॉर मैथेमैटिक्स टीचिंग एड्ज़ इन द प्राइमरी स्कूल'' एनसीईआरटी को बिना कुछ लिए ही दे दी, उसका कोई कॉपीराइट शुल्क नहीं लिया। इस अनूठी कृति का प्रकाशन सालों से बन्द है। इसे सभी भारतीय भाषाओं में अनुवादित करने की आवश्यकता है। पीकेएस हमेशा सफेद कुर्ता और खादी – खुरदुरा और घर के काते हुए सूत का कपड़ा जो कि गाँधी जी की स्वदेशी की अवधारणा का प्रतीक था – की बनी हुई धोती पहनते थे। वे हमेशा गाँधी टोपी भी पहनते थे। गणित के प्रति उनका जुनून चेन्नई में उनके घर के नज़दीक पहुँचने पर ही दिखाई देने लगता था। उनके अहाते का गेट, दीवारें, और जालियाँ, समीकरणों, सर्वसमिकाओं और देख कर ही समझे जा सकने वाले प्रमाणों से भरे पड़े थे। गणित का यह नामवर शिक्षक 2005 में 81 वर्ष की आयु में इस दुनिया से विदा हो गया।

पीकेएस को सबसे बड़ी श्रद्धांजलि होगी उनकी सभी किताबों का सभी भाषाओं में अनुवाद; उन्हें कम्प्यूटरी डिजिटल रूप देना और फिर दुनिया भर के बच्चों के लिए नेट पर उन्हें अपलोड करना। गणित की जादुई राह पर मोह कर ले जानेवाले इस व्यक्ति के लिए इससे बड़ी कोई श्रद्धांजलि नहीं हो सकती।

अरविन्द गुप्ता *पुणे स्थित आईयूसीएए के चिल्ड्रन्स साइंस सेन्टर के लिए काम करते हैं। किताबों तथा खिलौनों के प्रति अपने जुनून को अपनी लोकप्रिय वेबसाइट* http://arvindguptatoys.com *के माध्यम से लोगों के साथ बाँटते हैं। इस लेख में चर्चित किताबें इस वैबलिंक पर भी पढ़ी जा सकती हैं। अरविन्द गुप्ता से* arvindguptatoys@gmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

21 दुर्लभ ''श्रीमान गणित''

श्वेता राम



जब मुझे अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन के गिरिधर जी का ईमेल मिला कि लर्निंग कर्व का अगला अंक गणित पर आधारित है तो एकदम से मेरे दिमाग में दो शब्द उभरे – प्रेम... और... घृणा! और मुझे बड़ा सुखद आश्चर्य हुआ जब मैंने आगे पढ़ा कि लर्निंग कर्व की इच्छा है कि मैं गणित नामक इस पहेलीनुमा चिढ़ पैदा करने वाले विषय के साथ अपने (कुछ ऊबड़–खाबड़) सफर का वर्णन करूँ।

गणित की मेरी सबसे शुरुआती स्मृतियाँ किण्डरगार्टन और पहली कक्षा की हैं। मैं संख्याओं की अवधारणा को नहीं समझ पाती थी। वन एण्ड टू शुड बकल माई शू, तो थ्री कहाँ से आ गया?

एक तरफ जहाँ मेरे साथी हमेशा अपनी कार्यपुस्तिकाओं में काम पूरा करके लाते थे, वहीं मैं संख्याओं को और गिनती नामक अस्पष्ट अवधारणा को समझने के लिए संघर्ष करती थी। बेचारी मेरी माँ निरंतर मुझे मेरी उँगलियों पर गिनती सिखाने में लगी रहती थीं। मैं सोचती थी कि उँगलियों तो सिर्फ खाना खाने के लिए होती हैं। गिनती और संख्याओं को समझने में लगातार नाकाम रहने पर मैं क्लास टेस्टों में अक्सर नकल करती थी और मैं उसमें काफी अच्छी रही होऊँगी क्योंकि मैं बहुत कम बार पकड़ी गई। या हो सकता है मेरे दयालु शिक्षक सब देखकर भी अनदेखा कर देते थे, क्योंकि उन्हें पता था कि गणित में मेरी दाल कितनी पतली थी?

लेकिन जब मैं पाँचवी कक्षा में पहुँची तब तक मेरे भीतर एक ईमानदारी वाला भाव जाग चुका था। मैंने तय किया कि मैं सवालों को हल करने में संघर्ष करूँगी लेकिन परीक्षा में नकल नहीं करूँगी। नतीजा – मैं बस किसी तरह पास हो पाई। कंजूस गणित ने हर परीक्षा में अंकों का मेरा कुल योग एक झटके में कम कर दिया था। मुझे स्पष्ट रूप से याद है कि छःमाही परीक्षा के समय बच्चों के अंतिम रैंकों की घोषणा करते हुए मेरी एक शिक्षिका ने बताया था कि 41 बच्चों की कक्षा में मेरा स्थान आखिरी से एक पहले था। मैं मन ही मन मुस्कुराई कि चलो कोई एक बन्दा मुझसे भी पीछे है। पर मेरी यह खुशी ज्यादा समय नहीं रही–मैडम ने जल्दी ही अपनी बात का विस्तार किया, ''मलेरिया की वजह से रामकुमार दो पेपर नहीं दे पाया था, अतः तकनीकी रूप से हम उसके अंकों का अंतिम योग नहीं कर पाए!''

छठवीं तक पहुँचते–पहुँचते मैं वर्गमूल की भाँति अपनी कक्षा में एकदम नीचे चली गई और लगा कि जैसे अनंतकाल तक वहीं अटकी रही। तब तक, मेरे माता–पिता और मेरे दादा–दादी ने मेरी स्थिति बेहतर करने के लिए उन्हें ज्ञात हर तरकीब को आजमा कर देख लिया था पर उसका कोई खास असर नहीं हुआ था। गणित में मेरी कमजोरी संक्रामक सी थी, क्योंकि जल्दी ही इसका असर मेरे दूसरे विषयों पर भी पड़ने लगा। स्कूल मुझे नर्क जैसा लगने लगा।

मैं याद करने के मामले में कभी भी अच्छी नहीं थी। मुझे तो अभी भी अपना फोन नम्बर याद रखने के लिए मेहनत करना पड़ती है। तो मुझे समझ नहीं आता था कि मैं किस तरह गणित समझूँ। क्या मैं जटिल सूत्र याद कर डालूँ? क्या मैं रेखागणित की प्रमेयों को रट लूँ? क्या उन संख्याओं को अच्छी तरह से समझ लेने की कोई तरकीब थी जिनके साथ मेरे सभी साथी लगभग खेलते से थे।

मेरे चाचा एक असंभव योजना लेकर आए – गणित में अच्छे अंक ले आने पर उन्होंने मुझे छुट्टियाँ मनाने के लिए गोवा ले जाने का वादा किया। पर उस समय तक उन्होंने एक समझदारी का काम कर लिया। उन्होंने शादी कर ली। तब हम सब एक संयुक्त परिवार में रहते थे। उनकी खूबसूरत दुल्हन मेरे लिए दुनिया की सबसे अच्छी शिक्षिका, मार्गदर्शक और साथी साबित हुई। उन्होंने कुछ जादुई ढंग से गणित के साथ मेरे संघर्ष को समझ लिया और मुझे उस गर्त में से निकालने के लिए एक व्यावहारिक योजना बनाई। वे गणित का सवाल लेतीं और उसे खुद नहीं हल करती थीं। बल्कि, वे उस सवाल में छिपे तर्क को समझातीं और मुझे भी उसकी पहेली को समझने के लिए कहतीं और इस प्रक्रिया में हम दोनों मिलकर सवाल हल कर देते। गणित पढ़ने के मेरे तरीके में उन्होंने तर्क की समझ जोड़ दी, इससे मेरे लिए एक नए संसार का द्वार खुल गया। चीजों को तार्किक ढंग से देखने का मतलब था कि चीजों को रट कर सीखने की जरूरत नहीं रह गई थी। मुझे बस प्रश्न को समझकर उसकी जड़ तक

पहुँचना था और फिर तर्क के सहारे आगे बढ़ते जाना था। उनके मार्गदर्शन के परिणामस्वरूप मेरे भीतर गणित को लेकर ऐसी सहनशीलता की शुरुआत हुई जो आगे जाकर इस विषय के साथ एक सुखद सहअस्तित्व में बदल गई। आखिरकार मुझे भी संख्याओं के खेल में मज़ा आने लगा।

> *''मिसेज श्रीमति, मेरी शिक्षिका के अध्यापन का तरीका लगे रहने या जुटे रहने वाला प्रतीत होता था। उनका सिद्धान्त बड़ा अजीब सा था कि ''गणित के 500 सवाल हल करो, और फिर 501वाँ प्रश्न करते समय आपके पेन का ही दिमाग चलने लगेगा!'' सुनने में अजीब लगता है पर मेरे लिए तो यह तरीका जादू की तरह चला!''*

साथ ही साथ, गणित के कुछ पहलुओं में भी मेरी रुचि जगने लगी, खासतौर पर रेखागणित काफी रुचिकर लगने लगा। परीक्षाओं के लिए पढ़ते वक्त जब कभी भी मैं अंकगणित में कहीं अटक जाती, तो खट से मैं रेखागणित पढ़ने लगती थी। इस छोटे से विराम से हमेशा तनाव दूर हो जाता था। फिर जब मैं वापस गणित की ज्यादा मुश्किल चीजों पर पहुँचती तो अपने आप मैं सवाल को ज्यादा स्पष्टता और नए जोश के साथ करने की कोशिश करती।

10वीं कक्षा में पहुँचते–पहुँचते, मेरे प्रदर्शन में ज़बरदस्त सुधार आ गया था। लेकिन गणित बहुत कठिन हो चुका था जिसमें त्रिकोणमिति, मिश्रित बीजगणित, अवकलन और अनुकलन का भयानक मिश्रण शामिल हो चुका था। क्या गणित एक बार फिर दुष्टता करने वाला था?

सौभाग्य से मुझे एक ऐसी शिक्षिका मिल गई जिसने मेरा जीवन बदल दिया। मेरी शिक्षिका 'श्रीमति' के अध्यापन का तरीका लगे रहने या जुटे रहने वाला प्रतीत होता था। उनका सिद्धान्त बड़ा अजीब सा था कि ''गणित के 500 सवाल हल करो, और फिर 501वाँ प्रश्न करते समय आपके पेन का ही दिमाग चलने लगेगा!'' सुनने में अजीब लगता है – पर मेरे लिए तो यह तरीका जादू की तरह चला! आम आदमी की भाषा में, श्रीमति ने बस हमें यह भरोसा दिया कि बस कड़ी मेहनत करते जाएँ तो हर बार हमें अच्छे नतीजे मिलेंगे; पढ़ाई में आगे बढ़ने के लिए आपका अद्वितीय होना कोई जरूरी नहीं है। क्या श्रीमति का नुस्खा सुनकर कुछ लोगों की त्योरियाँ चढ़ गई हैं? भई, मेरे लिए तो यह तरीका काम कर गया।

यह मेरे जीवन का निर्णायक मोड़ था। गणित में अंक बढ़ते जाने से वह आत्मविश्वास दूसरे विषयों में भी झलकने लगा। इसके अलावा, एक बार सफलता का स्वाद चख लेने के बाद, उसे हाथ से जाने देना भी बहुत कठिन होता है!

इतनी ज्यादा मेहनत से पढ़ते वक्त हम खुद अपनी अध्ययन तकनीकें विकसित करने लगते हैं। निजी तौर पर मेरी प्रिय चीज थी कि मैं पढ़ाई के लिए एक बड़ा बेतुका और अति महत्वाकांक्षी टाइमटेबल बना लेती थी। ठीक चार घंटे में अनुकलन/अवकलन के 1000 सवाल हल करना है! जबकि मुझे यह मालूम होता था कि जो समय सीमाएँ मैंने तय की हैं उनके भीतर इतना काम करना निश्चित ही असंभव है। पर ऐसा करने से मुझे खुद से और मेहनत करवाने में परोक्ष रूप से मदद मिली। यदि मैं ज़रा कम कठोर या ज़्यादा व्यावहारिक समय सारणी बनाया करती तो निश्चित ही मैं थोड़ी सुस्त पड़ जाती और ढेर सारी चीजें पढ़कर अपने आपको इतना ज्यादा माँज नहीं पाती। इस तकनीक ने मुझे अपनी व्यावसायिक जिन्दगी में भी मदद की है। स्ट्रैच गोल्स (अवास्तविक लक्ष्य – ऐसे लक्ष्य जो किसी व्यक्ति की अपेक्षित कार्यक्षमता से बाहर हों) की सही कीमत साल के अंत में प्रदर्शन की समीक्षा में पता चलती है।

मैं बेझिझक यह स्वीकार करती हूँ कि मैं कभी भी बहुत दिमागदार विद्यार्थी नहीं थी। मैं तो हमेशा ही एक औसत विद्यार्थी ही रही, और आज भी हूँ। लेकिन, मैंने यह अहसास किया कि एक ऐसा उपकरण है कि जिसे मुझसे कोई नहीं छीन सकता। इस एक उपकरण को मैं अच्छे परिणामों की गारंटी के साथ किसी भी समय इस्तेमाल कर सकती हूँ। यह एक उपकरण जो मुझे कभी निराश नहीं करेगा वह है बस कड़ी मेहनत।

बल्कि, मेरा स्कूली दौर पूरा होते–होते यह तरीका इतना जबरदस्त ढंग से काम कर गया था कि मैंने जिंदगी भर के लिए संख्याओं का ही काम करने का निर्णय कर लिया। मैंने वित्त (फाइनेंस) में ही अपना पेशा चुना, पहले भारत में चार्टेड अकाउण्टेंट की डिग्री पूरी की और फिर अमरीका से सीपीए की

डिग्री हासिल की। इन दिनों, जब मुझसे पूछा जाता है कि मेरी ताकत क्या है, तो मैं बिना एक पल सोचे झट से कहती हूँ – संख्याएँ, तर्क और कड़ी मेहनत! तो मेरे लिए तो गणित एक ऐसी लम्बी कहानी रही है जो भय से शुरू हुई, फिर नफ़रत तक पहुँची और आखिरकार प्यार में बदल गई। गणित बैंगन के सदृश है! या तो आपको वह सब्जी पसन्द होती है और या आप उससे एकदम नफ़रत करते हैं बीच का कोई रास्ता नहीं होता। मैं आशा करती हूँ कि आप पढ़ाई की अपनी मनपंसद राह पर खूब मजा करें जितना कि मैं अपनी राह पर करती हूँ।

गणितीय रूप से आपकी,
श्वेता राम

श्वेता राम *बोस्टन साइंटिफिक, कैलिफोर्निया में वरिष्ट आर एण्ड डी फाइनेंस एनालिस्ट हैं। फाइनेंस में अपने पेशे के अलावा वे गायन के क्षेत्र में भी सक्रिय हैं। वे उदावुम कारंगल (तमिलनाडु स्थित जमीन से जुड़ा एक संगठन जो एक अनाथालय और बच्चों के लिए एक स्कूल चलाता है तथा जरूरत मन्द निराश्रितों को रहने की जगह देता है) के सैन फ्रांसिस्को चेप्टर के लिए भी स्वयंसेवी के तौर पर काम करती हैं। उनसे* shwetha1709@yahoo.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*



22 अगणितीय आत्मा के लिए गणित

देविका नारायण



मेरे और गणित के बीच हमारे सर्वश्रेष्ठ वर्षों के दौरान भी तनावपूर्ण सम्बन्ध रहे। आज तो यह नाता इतना परेशान करनेवाला बन चुका है कि कई मर्तबा मुझ पर यह आरोप लगा है कि यदि कोई बात गणित से जरा भी ताल्लुक रखती है तो उसके प्रति मेरे भीतर कोई 'अन्धा अवरोध', लगभग फोबिया जैसा बेबुनियाद भय, दीवाल खड़ी कर देता है। मैं इस बात को स्वीकार करती हूँ। लेकिन मैं इसे आधारहीन मानसिक आतंक के रूप में नहीं देखती, बल्कि इस क्षेत्र में अपनी सीमाओं के पीड़ादायी अहसास से उठता हुआ देखती हूँ। यह अहसास एक बोझ की तरह है जो गणित के साथ किसी भी अगले 'मुकाबले' की सम्भावना को निरस्त कर देता है, और फलस्वरूप यह सीमा और भी मजबूत हो जाती है। अतः मेरी वास्तविक समस्या अपने आप में यह सीमा नहीं है बल्कि वह तीव्र बेचैनी या भय है जो इससे पैदा होते हैं और जिनकी वजह से गणित में कोई लाभकारी प्रयास करने की गुंजाइश भी नहीं बचती। दरअसल बात यह है कि हर बार अपने भीतर के व्यक्ति को किसी गणितीय समस्या से घिरा हुआ पाकर मैं 'लड़ने' के बजाय वहाँ से 'भाग निकलने' का रास्ता चुनती हूँ ।

हमेशा से ऐसा नहीं था। मैं उन सुनहरे वर्षों को बयान करना चाहूँगी जब एक अद्‌भुत शिक्षक ने मुझे गणित के साथ एक नाजुक–सी दोस्ती बनाने में मदद की। मैं सेन्टर फॉर लर्निंग में बड़ी हुई जो विद्यार्थियों और शिक्षकों की एक ऐसी छोटी–सी बिरादरी है जहाँ ये लोग मिलकर पढ़ने की अवधारणा को मौलिक रूप से पुनर्परिभाषित करते हैं। गणित की कक्षा में, जब हम प्रश्नों को मिलकर हल करते थे, गलतियाँ करते थे, प्रश्न पूछते थे तो मेरा आत्मविश्वास बढ़ गया था। धीरे–धीरे, झिझक, घबराहट और भय के स्थान पर गणित की भाषा के प्रति विस्मय का भाव विकसित हो गया। पीछे देखने पर मुझे लगता है कि यह बहुत अनूठी बात थी कि कैसे अपने तमाम आत्मसंशयों व घबराहट के बावजूद कक्षा कतई डरावनी जगह नहीं लगती थी। मैं सुरक्षित महसूस करती थी क्योंकि मुझे पता था कि मुझे आँका नहीं जा रहा है या लगातार मेरा मूल्यांकन नहीं हो रहा है। ऐसा इसलिए था क्योंकि मेरी कक्षा में हमेशा ही संवाद के लिए सकारात्मक और दोस्ताना वातावरण होता था जिसमें मैं अपने डरों का मुकाबला कर सकती थी। एक ऐसी चीज, जिसके लिए मेरे पास कोई कौशल नहीं था, के साथ कुश्ती लड़ने की प्रक्रिया ऐसी बन गई जिसका पुरूस्कार (यानी कि सही उत्तर) बहुत संतोष देने वाला होता था, और सबसे बड़ी बात कि इसमें बहुत मजा आता था। कैसे मेरे शिक्षक ने यह जबरदस्त कमाल किया, यह वाकई में एक रहस्य है। मैं आपको बता दूँ कि मुझे गणितीय संघर्ष में मजा लेना सिखा पाना उनकी असाधारण उपलब्धि है। बल्कि, मुझे लगता है कि किसी शिक्षक की निपुणता परखने का मानदण्ड यही होना चाहिए। क्या आप अपने विषय के प्रति सबसे ज्यादा प्रतिरोधी रुख रखने वाले और मुश्किल प्रति वाले विद्यार्थियों को मजा लेने की राह दिखा सकते हैं? शिक्षा मंत्रालय को इसे शिक्षक की बुनियादी योग्यता बना देना चाहिए। मुझे अपनी कक्षाओं की जो सबसे जीवन्त स्मृति है, वह यह है कि मैं कक्षाओं में कितना बोलती थी – और मेरा सबसे ज्यादा दोहराया जाने वाला वाक्य होता था, 'पर मुझे समझ नहीं आया'।

मैं गणित में बताए जाने वाले हर कदम का बहुत होशियारी से और सावधानीपूर्वक अनुसरण करती थी, मेरे दिमाग के चक्के घूमते थे, और जब भी मेरे सामने कोई तात्कालिक अवरोध आ जाता तो मैं बीच में सवाल उठाती थी। मैं पूछती थी क्योंकि मैं समझना चाहती थी। मैं पूछती थी क्योंकि मुझे ऐसा करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता था। गणित हमेशा से ही मेरे लिए एक संघर्ष था। पर तब यह ऐसा संघर्ष बन गया था जिसमें मैं भाग लेना चाहती थी। हालाँकि मेरे लिए गणित कभी भी आसान नहीं था और मुझे उसमें हमेशा बहुत प्रयास करना पड़ता था, लेकिन फिर भी मुझे बड़ा आश्चर्य होता है कि उस दौरान मेरे मन में कक्षा के प्रति कोई भय या घृणा का भाव नहीं होता था। वह यात्रा किसी खड़ी ढलान वाली पहाड़ी पर लम्बी चढ़ाई करने के सदृश थी –

> *''पीछे देखने पर मुझे लगता है कि यह बहुत अनूठी बात थी कि कैसे अपने तमाम आत्मसंशयों व घबराहट के बावजूद मुझे कक्षा कतई डरावनी जगह नहीं लगती थी। मैं सुरक्षित महसूस करती थी क्योंकि मुझे पता था कि मुझे आँका नहीं जा रहा है या लगातार मेरा मूल्यांकन नहीं हो रहा है। ऐसा इसलिए था क्योंकि मेरी कक्षा में हमेशा ही संवाद के लिए सकारात्मक और दोस्ताना वातावरण होता था जिसमें मैं अपने डरों का मुकाबला कर सकती थी।''*

जो कठिन और बहुत ऊर्जा निचोड़ने वाली, पर अन्त में फलदायी होती है जब आप अपनी मंजिल पर पहुँच जाते हैं। ''ओह, ठीक है, अब मैं समझी'', अपनी छोटी–सी पहाड़ी की चोटी पर पहुँचकर मैं कहती थी।

मुझे उस कक्षा से निकले सात साल हो चुके हैं। जहाँ तक मेरे गणित का सवाल है, अब उसमें जंग लग चुकी है और मैं बिलकुल ही 'फॉर्म' में नहीं हूँ । मेरे कौशल जो एक समय लगातार अभ्यास के कारण सक्रिय थे, अब किसी इस्तेमाल न की गई माँसपेशी की भाँति शिथिल पड़ गए हैं, और आत्मविश्वास पूरी तरह खो जाने से मेरा गणित के प्रति भय और दहशत का पुराना रवैया वापस लौट आया है।

तो गणित के साथ मेरा यह निजी अनुभव शिक्षकों के लिए प्रासंगिक और महत्वपूर्ण क्यों है? क्या यह हमें सीखने की प्रक्रिया के बारे में कुछ उपयोगी बात बताता है? मैं यह इसलिए पूछ रही हूँ क्योंकि हम यह आराम से मान सकते हैं कि यह कोई अनूठा अनुभव नहीं है जो पूर्णतः अकेला मेरा हो। ऐसे विद्यार्थियों की बड़ी संख्या है जिनमें गणित के प्रति अरुचि का भाव होता है और जिन्हें गणित बेहद कठिन, हताश करने वाला, और बिलकुल भयावह लगता है। ये बातें परीक्षाओं में बदतर प्रदर्शनों, शिक्षकों द्वारा की जाने वाली तुलनाओं और खुद को अपने दोस्तों की तुलना में 'मूर्ख' मानने की भावना से और बलवती होती जाती हैं। शिक्षकों को ऐसे विद्यार्थियों की मदद करने के लिए लगातार ऐसे मौलिक व सृजनात्मक तरीके खोजते रहना चाहिए जिनसे खलबली और घबराहट के रूप में बाहर आने वाली उनकी भावनात्मक प्रतिक्रिया की तीव्रता को कम किया जा सके। गणित को खेलने की वस्तु के रूप में परिवर्तित करना होगा। जैसे कि कोई विशाल जिगसॉ पहेली को हल करना या फिर गुँथे हुए ऊन के किसी बड़े गोले को सुलझाना। उसके साथ खेलें। उस पर काम करें। उसकी बारीक सटीकता को सराहें।

यदि शिक्षक ऐसा कौशल हासिल कर पाता है तो ही गणित एक परभक्षी दैत्य से रूपान्तरित होकर एक मजेदार व चुनौतीपूर्ण खेल बन सकेगा।

मुझे पता है कि जब मैं फिर से गणित की चुनौती का सामना करने की ठानूँगी तो वह कतई आसान नहीं होगा और उसमें अथक प्रयास तथा कड़ी मेहनत लगेगी। लेकिन अपनी कक्षा के दौर से मैं एक चीज तो याद रखूँगी कि इस चुनौती से भरी प्रक्रिया का मजा कैसे लेना है।

देविका नारायण *ने 2006 में सेन्टर फॉर लर्निंग से स्नातक की पढ़ाई पूरी की। उन्हें सामाजिक विज्ञान पढ़ने में, लेखन में, पत्रकारिता में, विरोध करने में, दिल्ली घूमने में, पैदल चलने में, धूप में बैठकर किताबें पढ़ने और जलेबियाँ खाने में मजा आता है। फिलहाल देविका दिल्ली स्कूल ऑफ इकॉनॉमिक्स से समाजशास्त्र में स्नातकोत्तर की पढ़ाई कर रही हैं। उनसे* narayan.devika@gmail.com *पते पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

अनजाने नायकः वह क्या है जो उन्हें अनूठा बनाता है?

अनंत गंगोला



वह क्या है जो कुछ शिक्षकों को अन्य शिक्षकों की तुलना में अनूठा बना देता है? इस प्रश्न के आते ही किसी भी व्यक्ति के दिमाग की गहराई में अनेक शिक्षकों की छवियाँ उभरती हैं। मैंने भी ऐसे शिक्षकों की छवियों और उनके कामों का विश्लेषण करना शुरू किया। मेरी कहानी के नायक कोई और नहीं बल्कि दूर दराज के गाँवों के सरकारी स्कूलों में कार्यरत शिक्षक हैं। शहरी या निजी स्कूलों के शिक्षकों के प्रति मेरा कोई पूर्वाग्रह नहीं है। यह बस एक इत्तफाक है कि पिछले 15–20 सालों के दौरान मुझे ज्यादातर ग्रामीण क्षेत्रों के सरकारी प्राथमिक स्कूलों के साथ काम करने के मौके मिले हैं।

मेरे पहले नायक हैं महेश औद, जो मध्यप्रदेश के कैम्प नं. 4 नामक छोटे से गाँव के एक वैकल्पिक स्कूल में शिक्षक हैं। मुझे बहुत अच्छे से याद है जब मैं पहली बार उस स्कूल में गया था। स्कूल के सभी बच्चों ने अपनी स्लेटों और कापियों के साथ मुझे घेर लिया और कहने लगे, ''मास्टर जी हमें सवाल दीजिए''। मैं उन्हें एक के बाद एक सवाल देता रहा, लेकिन वे जोड़, घटाने, गुणन और भाग के और सवाल माँगते ही रहे। वे बिजली की गति से सवाल हल कर रहे थे – इतनी तेजी से कि मेरे उन्हें पूरे सवाल दे पाने के पहले ही कोई बच्चा उत्तरों के साथ मेरे पास भागता हुआ आ जाता था। बच्चे तो उकता ही नहीं रहे थे लेकिन कुछ देर के बाद मैं जरूर थका हुआ महसूस करने लगा। यह अनुभव मेरे दिमाग में अभी भी ताजा है। अब तक, हो सकता है कि आप यह सोचने लगे हों कि क्यों मैं सिर्फ बच्चों की ही बातें कर रहा हूँ जबकि असल में तो मैं शिक्षक का वर्णन करना चाहता हूँ। मैं ऐसा इसलिए कर रहा हूँ क्योंकि मैं शिष्यों की आँखों में उनके गुरु को देख सकता था।

इस स्कूल की घटनाएँ असाधारण थीं और मैं जिन भी स्कूलों में इससे पहले गया था वहाँ से एकदम भिन्न थीं। इसीलिए महेश मेरे पहले नायक हैं, वह शिक्षक जो एक असाधारण काम कर रहे हैं। मैं आपको इनकी कुछ सहज लेकिन बेहद महत्वपूर्ण विशेषताओं के बारे में बताना चाहूँगा। महेश का प्रत्येक बच्चे को एक सम्पूर्ण अलग व्यक्तित्व के रूप में स्वीकार करना बिलकुल अनोखी और अनसुनी बात थी। महेश हर बच्चे पर ध्यान देने और उसके साथ गैर–शैक्षणिक वार्तालाप करने की फिकर कर रहे थे। इसके कुछ उदाहरण हैं

''शोभा, तुम्हारा बछड़ा कैसा है?''
''सुनील, क्या तुम्हारे मामा लौट आए?''
''रेखा, आज तुम्हारे बाल किसने बनाए हैं?''

इस तरह की अनौपचारिक बातचीत बच्चों को बहुत सहज बना दे रही थी। इसलिए वहाँ का माहौल बिलकुल ही भयमुक्त था। महेश बच्चों को एक समूह के रूप में नहीं देखते थे। हर बार वे हरेक बच्चे के साथ अलग से काम करने का समय निकाल लेते थे और उन्हें उनके नामों से बुलाते थे। कभी भी किसी को भी 'ए लड़के' या 'ए लड़की' कहकर नहीं पुकारते थे। मुझे लगता है कि यह एक ऐसा महत्वपूर्ण गुण था जिसने बच्चों के बीच उनकी स्वीकार्यता में महत्वपूर्ण भूमिका अदा की।

उनके पढ़ाने के ढंग के बारे में जो अन्य खास बात मुझे अच्छी लगी वह यह थी कि महेश ने कभी भी खुद को अकेला सन्दर्भ व्यक्ति नहीं समझा। जैसे कि एक बच्चा उनके पास कोई सवाल लेकर आया तो उसे स्वयं हल कर देने के बजाय बच्चे को सीमा (एक अन्य बच्ची) के पास भेज दिया और उसके साथ मिलकर सवाल हल करने के लिए बच्चे को प्रेरित किया। ऐसा प्रतीत होता था कि उन्हें कभी भी सवाल का जवाब खुद देने की जल्दी नहीं थी बल्कि वे धैर्यपूर्वक बच्चे को उसे हल करने की कोई कार्यविधि सुझाते ताकि बच्चा या तो खुद ही हल तक पहुँच जाए या फिर किसी अन्य साथी की मदद ले ले। वहाँ बना–बनाया जैसा कुछ उपलब्ध नहीं था और इससे बच्चे हमेशा किसी न किसी चीज के साथ व्यस्त रहते थे। यह व्यवस्था बच्चों को खुद से सीखने का मौका प्रदान कर रही थी; इससे बच्चों को अपनी ऊर्जा का इस्तेमाल करने में मदद मिल रही थी और हर बार किसी सवाल को हल कर लेने पर वे आनन्द और कुछ खोज लेने की भावना का पूरी तरह से मजा ले रहे थे।

''वे हरेक बच्चे के साथ अलग से काम करने का समय निकाल लेते थे और उन्हें उनके नामों से बुलाते थे। कभी भी किसी को भी 'ए लड़के' या 'ए लड़की' कहकर नहीं पुकारते थे। मुझे लगता है कि यह एक ऐसा महत्वपूर्ण गुण था जिसने बच्चों के बीच उनकी स्वीकार्यता में महत्वपूर्ण भूमिका अदा की।''

असाधारण शिक्षकों की शृंखला में अगली हैं सरस्वती। सरस्वती के स्कूल का परिदृश्य महेश के स्कूल से अलग था। वहाँ हर चीज बड़ी व्यवस्थित प्रतीत हो रही थी। बच्चे 5 या 6 के छोटे–छोटे समूहों में बैठे देखे जा सकते थे। सरस्वती के पास सभी समूहों के लिए दिन की कार्ययोजना थी। दिन की शुरुआत में सरस्वती ने बच्चों को अपने–अपने समूहों के साथ बिठवाया और बारी–बारी से उन्हें काम बाँटे। प्रत्येक समूह को एक अलग कार्य दिया गया। कामों को बाँटे जाने के बाद वे एक–एक करके हर समूह के पास गईं और उन्हें अपना काम शुरू करने में मदद की। हर चीज की योजना उन्होंने पहले से ही बना ली थी – प्रत्येक समूह कहाँ बैठेगा, इत्यादि। कुछ समूह स्कूल भवन के अन्दर बैठे थे, वहीं बाकी बाहर खुले मैदान में। इसके बावजूद कहीं कोई अस्तव्यस्तता नजर नहीं आ रही थी।

काम देने और उनका मूल्यांकन करने का कार्य खुद बच्चों द्वारा आपस में किया जा रहा था। सरस्वती एक शिक्षिका नहीं बल्कि एक बड़ी बच्ची की भाँति लग रही थीं। एक समूह किसी पेड़ के विभिन्न अंगों पर काम कर रहा था। सरस्वती ने इसके बारे में किसी किताब में से पढ़ाकर या कोई रेखाचित्र बनाकर बच्चों को नहीं समझाया बल्कि बच्चों से एक पौधे को उखड़वाकर उनसे जड़ों, तनों, डालियों, और पत्तियों के बारे में चर्चा की। इसके बाद बच्चों से अपनी कॉपियों में पेड़ के विभिन्न भागों के रेखाचित्र बनाने को कहा। फिर सरस्वती ने बच्चों को किताब के एक अध्याय में से पेड़ के विभिन्न भागों के बारे में समझाया। वह बच्चों को जो भी पढ़ा रही थीं उसके हरेक शब्द का अर्थ उन्हें पता था और उसका यही गुण उन्हें बाकी सब से अनूठा बनाता है।

मेरे अगले नायक हैं रमेश जो कि इकलौते शिक्षक वाले स्कूल के अकेले शिक्षक हैं। उनका स्कूल उत्तराखण्ड राज्य के उत्तरकाशी जिले के सुदूरवर्ती 'मोरी ब्लॉक' में स्थित है। जब बात उनके विद्यार्थियों की आती है तो रमेश संवेदनशीलता का प्रतिमान हैं। उनका असाधारण धीरज और बच्चों की बात सुनने के लिए इच्छुक होना उन्हें बाकी सबसे अलग करता है। बच्चों द्वारा अपने अनगिनत सवालातों के साथ उन्हें घेर लेने के बावजूद रमेश उन सभी की बात बड़े ध्यान से सुनते और प्रत्येक बच्चे को उपयुक्त ढंग से जवाब देते। कक्षा के संचालन के मामले से जुड़े फैसले लेने में उनका तरीका लोकतांत्रिक था। उनकी कक्षा में कार्य कभी भी औपचारिकता के लिए नहीं दिए जाते थे। बल्कि वे अपनी कक्षाओं की गतिविधियों की योजना बच्चों के साथ मिलकर ही बनाते थे। मैं इस स्कूल को सही अर्थों में 'बच्चों का स्कूल' कह सकता हूँ जहाँ हर बच्चा निर्णय प्रक्रिया में शामिल रहता है।

रमेश की असाधारण प्रतिभा थी बच्चों के निर्णयों के मुताबिक अपने अध्यापन को ढाल लेने की अद्भुत क्षमता। एक शिक्षक के तौर पर वह आत्मविश्वास से लबरेज हैं और अपने विषय पर उनकी मजबूत पकड़ है।

> *''वे बच्चों को जो भी पढ़ा रही थीं उसके हरेक शब्द का अर्थ उन्हें पता था और उनका यही गुण उन्हें बाकी सब से अनूठा बनाता है।''*

इसके साथ ही वे परिस्थिति की माँग के मुताबिक नवीनता लाने में भी सक्षम हैं और उनकी यही बात उन्हें उनके साथियों से जुदा बनाती है।

इन स्कूलों में, जहाँ मेरे ये नायक पढ़ा रहे थे, बच्चों को पढ़ाने के तरीकों में व्यापक अन्तर था। जब हमने उनके बीच कुछ बुनियादी समानताएँ ढूँढने की कोशिश की तो हमें ये बातें समझ में आईं। बच्चों के प्रति उचित सम्मान का होना, पढ़ने–पढ़ाने की प्रक्रिया में बच्चों को शामिल करना, और इस तरह उन्हें निष्क्रिय विद्यार्थी की बजाय सक्रिय भागीदार बनाना, बच्चों को प्रश्न पूछने के लिए प्रोत्साहित करना, बच्चों को अपने भावों को अभिव्यक्त करने की स्वतंत्रता देना और लोकतांत्रिक मूल्य अपनाना आदि। ऐसे स्कूलों में शिक्षा कोई यांत्रिक प्रक्रिया नहीं बल्कि जाहिर तौर पर ऊर्जावान सक्रिय होती है जो कि दिलचस्प गतिविधियों से जीवन्त बनी रहती है।

इसके अलावा, इन शिक्षकों के बीच एक सुस्पष्ट समानता है। इस लेख में उल्लेखित तीनों शिक्षक खुद को 'विद्वान' शिक्षक नहीं समझते बल्कि उनका मानना था कि वे 'सीख रहे शिक्षक' हैं। कुछ नया सीखने की भूख और प्रेरणा उनके भीतर खासी जीवित है। इसके चलते, वे लगातार अध्ययनरत रहते हैं और उनके भीतर रोज कुछ न कुछ नया सीखने की लालसा रहती है। अतः ऐसे शिक्षकों के कौशल पर एक निश्चित समय गुजर जाने के बाद भी जंग लग जाने का डर नहीं रहता।

अनंत गंगोला *अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन, उत्तराखण्ड के राज्य प्रमुख हैं। उन्होंने इण्डियन इंस्टीट्यूट ऑफ सोशल साइंसेज़ से एम. फिल. किया है। उदयपुर से फ्यूचरोलॉजी पर एक कोर्स भी किया है। उन्होंने नीलगढ़, मध्यप्रदेश में स्थानीय जनजातीय समुदाय के बीच साक्षरता और सामाजिक उत्थान के लिए काम किया है। वे मध्यप्रदेश के रायसेन जिले में जिला परियोजना अधिकारी (डीपीओ) भी रहे हैं। उनके प्रयासों के लिए राज्य सरकार द्वारा उन्हें सम्मानित किया गया है। युनाइटेड नेशन्स लीडरशिप एकैडमी द्वारा जॉर्डन में फैलोशिप द्वारा सम्मानित हो चुके अनंत को प्रो. रमेश चंद्र भट्ट फैलोशिप भी प्राप्त हुई है। उन्होंने जोहैनेसबर्ग, दक्षिण अफ्रीका में आयोजित अर्थ समिट में भारत का प्रतिनिधित्व किया था। उनसे इस* anant@azimpremjifoundation.org *ईमेल पते पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

तर्क–गणित की दिमागी कसरतें

मेज पर तीन पात्र रखे हुए हैं, एक पात्र 800 मिलीलीटर का है और सेब के रस से पूरा भरा है। अन्य पात्र क्रमशः 500 मिली और 300 मिली के हैं। राजदीप किसी पाक–विधि के लिए ठीक 400 मिली सेब का रस मापना चाहता है। इस प्रश्न को हल करने में आप राजदीप की किस तरह से मदद कर सकते हैं?

इस स्थान का उपयोग गणना हेतु करें। 🙂

खण्ड इ

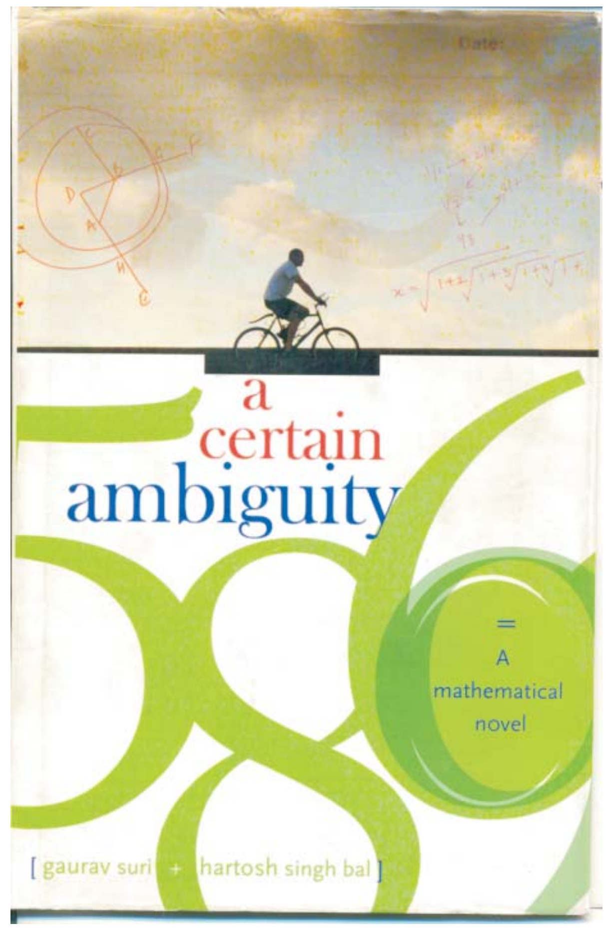
किताब चर्चा और स्रोत सामग्री

24 पढ़ने योग्य दो किताबें

नीरजा राघवन



यहाँ दो प्रयास प्रस्तुत हैंः एक गणित की प्रकृति में झाँकने का है, और दूसरा एक असाधारण गणितीय प्रतिभा वाले व्यक्ति के मानसिक क्रियाकलापों की एक झलक पाने का । मैं दो अनोखी किताबों को पढ़ने के अपने अनुभव को आप लोगों के साथ बाँटना चाहती हूँ। **ए सर्टेन ऐम्बीग्युटी** (गौरव सूरी व हरतोष सिंह बल द्वारा लिखित) और **द मैन हू न्यू इन्फिनिटी ए लाइफ ऑफ द जीनियस रामानुजन** (रॉबर्ट कैनिजेल द्वारा लिखित)। पहली किताब पाठक को ऐसी यात्रा पर ले जाती है जो इस विषय की असीम सुन्दरता को प्रगट करती है जबकि दूसरी किताब पाठक को एक आदमी के दिमाग के चमत्कारों के बारे में बताकर विस्मित कर देती है। ये दोनों किताबें अँग्रेजी में हैं।



ए सर्टेन ऐम्बीग्युटी (एक खास दुविधा) खुद का परिचय 'एक गणितीय उपन्यास' की तरह देता है (बल्कि कहें कि उसके लेखक ऐसा कहते हैं)। यह बात मुझे इतनी पहेलीनुमा लगी, कैसे कोई उपन्यास गणितीय हो सकता है? मैं उसे पढ़ने पर मजबूर हो गई।

और इस तरह शुरू हुआ एक सम्मोहित कर देने वाला अनुभव। स्कूल में मुझे गणित में कोई खास मजा नहीं आता था और कॉलेज में तो गणित से मुझे बिलकुल ही अरुचि हो गई थी। लेकिन यह किताब पढ़ने के बाद मुझे लगा कि काश मुझे इस ढंग से गणित पढ़ाया गया होता। क्यों किसी शिक्षक ने संख्याओं की, विस्मित कर देने वाले तर्कों की, कलापूर्ण संरचनाओं की खूबसूरती देखने में मेरी मदद नहीं की? इन सभी पहलुओं को अनुभव करने के लिए क्या स्टैनफोर्ड विश्वविद्यालय जाकर पढ़ना जरूरी है (जैसा कि किताब का मुख्य नायक करता है)? निश्चित ही यह जरूरी नहीं है जैसा कि दूसरी किताब से प्रगट होता है, पर उसके बारे में और बातें बाद में होंगी।

ए सर्टेन ऐम्बीग्युटी का शीर्षक, पूरी किताब में एक दादा और उसके पोते की लगातार चलती कशमकश से निकलता हैः क्या गणित या जिन्दगी में कभी पूर्ण निश्चितता हो सकती है? भलीभाँति सोचे गए कथानक (जो काफी रोमांच व उत्सुकता से भरा हुआ है) और गणित की वास्तविक व्याख्याओं (जो स्टैनफोर्ड विश्वविद्यालय में दिए गए व्याख्यानों के माध्यम से किए गए और आपको लगता है कि काश आप उनमें उपस्थित रहे होते) को आपस में बुनते हुए यह किताब बहुत खूबसूरत ढंग से कल्पित कथा और गणित के बीच झूलती है। मैं आपको यह बताते हुए झिझक रही हूँ कि पूरी किताब में गणित–आधारित व्याख्यान बिखरे हुए हैंः क्योंकि इससे यह किताब डरावनी सी लगने लगती है। यकीन मानिए, वे बेहद लुभावने व्याख्यान हैं। पूरी किताब में तथ्यों के प्रति कसावट भरी सावधानी बरती गई हैः और आश्चर्यजनक बात यह है कि इसके बावजूद यह पढ़ने में बहुत दिलचस्प व मनोरंजक है। मुझे पता ही नहीं था कि गणित इतना आकर्षक भी हो सकता है। यह किताब पढ़कर मैं इस सोच में भी पड़ गई कि मानवीय ज्ञान के विस्तार और उसकी सीमाओं का सामना करने का क्या मतलब है? यह किताब गणित के सभी शिक्षकों को और खासतौर पर उन लोगों को, जो गणित का नाम सुनते ही आतंकित हो जाते हैं, जरूर पढ़नी चाहिए।

सूरी व बल – जो बचपन से ही दोस्त हैं और दोनों ने ही गणित में स्नातकोत्तर स्तर की पढ़ाई की है (क्रमशः स्टैनफोर्ड व न्यूयॉर्क विश्वविद्यालय से) द्वारा लिखित यह किताब लेखकों के इस उद्देश्य को पूरा करती हैः ''ए सर्टेन ऐम्बीग्युटी'' लिखने के पीछे हमारा मुख्य उद्देश्य पाठक को यह दिखाना है कि गणित कितना सुन्दर विषय है। इसके अलावा, हम यह दर्शाने की भी कोशिश

करते हैं कि मनुष्यों के लिए वाकई में किसी चीज को जानना क्या होता है, इस बारे में गणित के पास कहने के लिए कितनी गूढ़ बातें हैं।'' इस तरह से लेखकों का प्राक्कथन शुरु होता है।

हममें से अधिकांश लोग इस प्रसिद्ध कथा को जानते हैं कि किस तरह 1913 में एक 25 वर्षीय भारतीय युवा ने, जिसके पास कोई औपचारिक शैक्षणिक उपाधियाँ नहीं थीं, कैम्ब्रिज (विश्वविद्यालय) के मुखिया जी.एच. हार्डी को अचरज में डालने वाली मौलिक प्रमेयों से भरी हुई एक चिट्ठी लिखी। और हमको इस बात की भी धुन्धली सी जानकारी है कि किस तरह रामानुजन ने अगले पाँच वर्षों में गणित को एकदम उल्टापुल्टा कर दिया था।

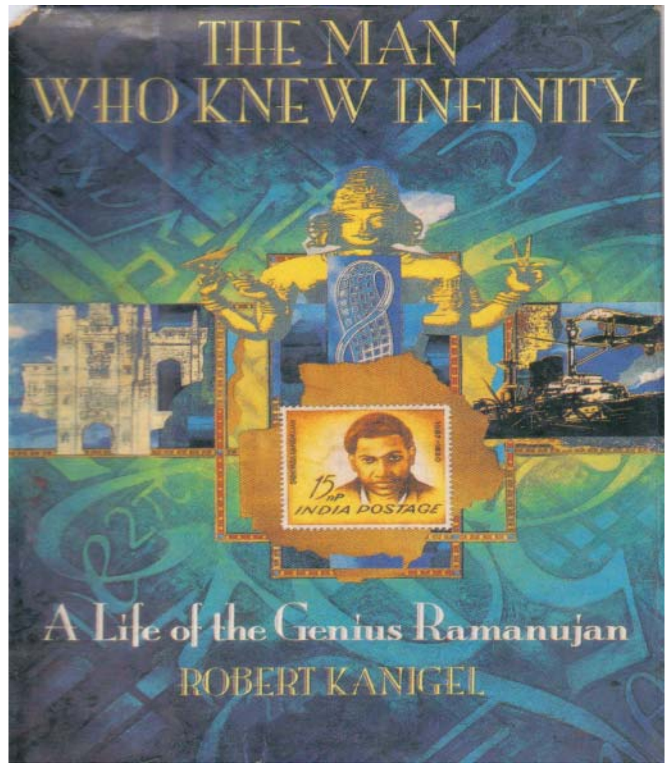
पर हमको (या हममें से अधिकांश को) इसके अलावा न के बराबर जानकारी है।

पर अब हमारे पास एक ऐसी किताब है जो एक असामान्य व एकदम निराले दिमाग पर ही केन्द्रित हैः ऐसा दिमाग जिसकी दुख भरी कहानी अभी भी उसके देशवासियों को एक से ज्यादा कारणों की वजह से याद आती है। हालाँकि, हार्डी सामान्य मिलने जुलने वाले लगते थे, लेकिन वे अलग–थलग रहने वाले भावशून्य से व्यक्ति थे जैसे कड़क अँग्रेज। दूसरी तरफ यह युवक, जो ''पत्थर की मूर्तियों को पूजते हुए बड़ा हुआ था; जो अपने जीवन के अधिकांश समय अपनी कुलदेवी से मार्गदर्शन लेता रहा था, और जिसने यह घोषणा भी की थी कि उनके पास जो भी गणितीय अन्तर्दृष्टियाँ थीं वे उनकी इन्हीं कुलदेवी की कृपा से ही थीं'', बाद में अवसाद से घिरा हुआ, चिड़चिड़ा और झगड़ालू होकर 1919 में भारत लौटा। और एक साल बाद वह चल बसा।

यदि वाकई में कभी कोई अनसराहा नायक हुआ है, तो वह यह व्यक्ति था।

अपने 33 वर्ष के छोटे से जीवनकाल में उन्होंने इतना कुछ कर लिया था कि दुनियाभर के गणितज्ञ अभी भी उसमें से कुछ चीजों की थाह लेने की कोशिश कर रहे हैं। इसके बावजूद, उनकी बीस वर्षीय विधवा ने अगली आधी सदी का अधिकांश समय बहुत सादा और गुमनामी भरा जीवन जीकर बिताया। वे सम्भवतः अकेली व्यक्ति नहीं थीं जिन्हें अपने पति की बौद्धिक सामर्थ्य का आभास नहीं था।

यह जीवनी जरा अलग हटकर है, क्योंकि जैसा कि लेखक कहते हैं: ''जिस तरह की जीवनियाँ मौजूद हैं, उनमें या तो गणित की उपेक्षा कर दी गई होती है, या फिर उसे किताब के एकदम पीछे फेंक देते हैं। इसी प्रकार, रामानुजन के गणित के बारे में जो विद्वतापूर्ण शोधपत्र होते हैं वे उनके जीवन की चर्चा सामान्यतः सिर्फ कुछ पैराग्राफ तक ही सीमित कर देते हैं। लेकिन, क्या हम उस गणित को थोड़ा सराहे बगैर रामानुजन के जीवन को समझ सकते हैं जिसके लिए वे जिए और जिसे उन्होंने इतनी शिद्दत से प्यार किया? कहने का अर्थ यह हुआ कि क्या हम किसी कलाकार को उसकी कला के प्रति संवेदनशील हुए बिना समझ सकते हैं? या किसी दार्शनिक को, बिना उसकी मान्यताओं में झाँके बिना समझ सकते हैं?''



यह किताब ऊपर वर्णित उद्देश्य पर इस दृष्टि से खरी उतरती है, कि वह पाठक को ऐसी कुछ गणितीय समस्याओं में ले जाती है जिनमें रामानुजन ने अपना संख्या सिद्धान्त उपयोग किया था, हालाँकि वह उनके द्वारा इस्तेमाल किए गए सूक्ष्म और प्रभावशाली गणितीय उपकरणों की बहुत विस्तृत चर्चा में नहीं उलझती। लेखक खुद स्वीकार करते हैं कि, रामानुजन का गणित कुछ दूसरे क्षेत्रों की अपेक्षा ज्यादा सुलभ है; उसमें से काफी कुछ संख्या सिद्धान्त के शीर्षक के अन्तर्गत आ जाता है, जो हमारे द्वारा रोज इस्तेमाल होने वाली साधारण संख्याओं के गुणधर्मों, और उनके बीच की नियमित संरचनाओं की तलाश करता है।

बचपन के जिज्ञासु रामानुजन के बारे में नीचे दी गई कुछ छोटी–मोटी रोचक बातें पाठक की और ज्यादा जानने की भूख को और बढ़ाती हैं (खासतौर पर अगर पाठक कोई शिक्षक हो): ''चुपचाप और चिन्तनशील रहने वाले रामानुजन को इस किस्म के प्रश्न पूछने का बहुत शौक था कि दुनिया का पहला आदमी कौन था? बादलों के बीच में कितनी दूरी होती है?''

यह किताब कई विरोधाभासों (गणितीय व असली जीवन से जुड़े

भी) को सामने लाती है, जिनमें से एक महत्वपूर्ण विरोधाभास है एक पक्के नास्तिक (हार्डी) और नमक्कल की देवी नमागिरि के एक निष्ठावान श्रद्धालु के बीच बना अजीब गठजोड़। रामानुजन ने एक बार कहा था, ''मेरे लिए किसी समीकरण का तब तक कोई अर्थ नहीं जब तक कि वह ईश्वर के विचार को अभिव्यक्त न कर रहा हो।''

इस किताब पर काम करते हुए रॉबर्ट कैनीजेल ने पाँच हफ्ते दक्षिण में गुजारे। वे रामानुजन के जीवन में आने वाले स्थानों पर गए। ''मैंने ट्रेनों और बसों की सवारी की, मन्दिरों में गया, अपने हाथों से केले के पत्तों पर रखा भोजन खाया। कुम्बकोणम की सड़कों पर मुझे पीछे से एक गाय ने टक्कर मारी, कोडूमुडी में एक छिपकली के साथ एक कमरे में रहा।''

इसलिए अचरज नहीं है, कि खुद को श्रेष्ठ और दूसरों को तुच्छ समझने की जो भावना अक्सर (शायद अनजाने में भी) कई पश्चिमी लेखकों की भारत/भारतीयों के बारे में लिखी गई रचनाओं में झलकती है, वह इस किताब में कतई नहीं दिखती।

यह किताब छोटी–मोटी व्यंग्यपूर्ण बातों का वर्णन करती है जैसे कि यहः अप्रैल, 1920 में रामानुजन की मृत्यु के समय, इण्डियन मेथेमेटिकल सोसायटी के जर्नल के सम्पादक अपने प्रकाशन कार्यक्रम से इतना पीछे खिसक गए थे कि इस खबर को छापने वाले अंक की तारीख दिसम्बर 1919 छपी थी। उस अंक की प्रतियों में जैतूनी हरे रंग की कागज की छोटी–छोटी पर्चियाँ, जिनकी किनारियाँ काली थीं, डाली गई थीं:

स्वर्गीय श्री एस. रामानुजन

हमें यह बताते हुए बेहद अफसोस हो रहा है कि श्री. एस. रामानुजन, बी.ए., एफआरएस., का असामयिक निधन सोमवार, 26 अप्रैल 1920 को चेटपेट, मद्रास स्थित उनके निवास पर हो गया। उनके जीवन व कार्यों का लेखाजोखा इस जरनल के अगले अंक में प्रकाशित होगा। सात महीने के बाद जरनल में दो श्रद्धांजलि लेख छपे।

इन दोनों किताबों ने मेरे भीतर गणित को अच्छे से सीखने की आकांक्षा जगा दी है; और इस विषय की जो (उपदेशात्मक और नीरस) छवि बना रखी थी उसे काफी जोर से हिला दिया है। मैं जमकर इन दोनों किताबों की अनुशंसा करती हूँ, खासतौर पर गणित के शिक्षकों के लिए, क्योंकि उन्हें अपनी कक्षाओं में उपयोग करने के लिए इन किताबों से रसदार सामग्री मिलेगी।

नीरजा राघवन *अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन, बंगलौर में ऐकेडमिक्स व पैडागॉजी सलाहकार हैं। वे पिछले कई सालों से स्वतंत्र रूप से लिख रही हैं और उनके सत्तर से भी ज्यादा लेख देश के प्रमुख अखबारों व पत्रिकाओं में छप चुके हैं। इसके अलावा वे तीन किताबों (क्यूरियसर एण्ड क्यूरियसर, फुल सर्किल 2004य आई वण्डर व्हाय एण्ड आई वण्डर हाऊ, चिल्ड्रन्स बुक ट्रस्ट 2005, 2006) की लेखिका व एक किताब (ऑल्टर्नेटिव स्कूलिंग इन इण्डिया, सेज पब्लिकेशंस 2007) की सह–सम्पादक हैं, और अण्डरस्टैंडिंग रिलीजन्स (जैन विश्व भारती संस्थान, लाडनूं 2004) शीर्षक से निकाली गई एक सीडी की सम्पादक भी हैं। उनसे* neeraja@azimpremjifoundation.org *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

तर्क–गणित की दिमागी कसरत

एक बॉक्स में 12 गेंदें हैं। वे आकार, रूप, रंग, स्पर्श, आभास आदि में बिलकुल एक जैसी हैं। इनमें से एक गेंद का वजन शेष से थोड़ा भिन्न है। यह शेष से भारी भी हो सकती है या हल्की भी। शेष 11 गेंदों का वजन बिलकुल एक जैसा है। आपको दो पलड़ों वाला एक तराजू दिया गया है, लेकिन कोई बाँट नहीं दिए गए हैं। केवल तीन बार वजन करके, आप किस तरह उस भिन्न वजन वाली गेंद की पहचान करेंगे और पता लगाएँगे कि वह बाकी गेंदों की तुलना में भारी है या हल्की?

(संकेतः गेंदों पर लेबल लगा दें और बारी–बारी से तौलने के लिए विभिन्न संयोजनों को इस्तेमाल करके देखें।)

इस स्थान का उपयोग गणना के लिए करें 🙂

25 गणित शिक्षकों के लिए डिजिटल स्रोत

एस एन गणनाथ



पिछले लगभग एक दशक में सूचना और संचार तकनीकों (हार्डवेयर और सॉफ्टवेयर, दोनों) में हुई अद्भुत प्रगति की वजह से अब शिक्षकों के लिए उत्तम गुणवत्ता वाले डिजिटल स्रोत सुलभ हो गए हैं और उन्हें सीधे या परोक्ष रूप से कक्षाओं में उपयोग करना सम्भव हो गया है।

इन स्रोतों में कुछ अनोखी विशेषताएँ हैं जिनकी वजह से ये शिक्षकों के लिए आकर्षक बन जाते हैं, जैसेः

1. व्यापक उपलब्धता
2. विभिन्न विषयों और कक्षाओं हेतु उनके मुताबिक स्रोतों की विशाल श्रेणी
3. अभिनव सृजनात्मक विचार
4. ऑनलाइन या फिर ऑफलाइन, किसी भी तरह इन्हें प्रयोग किया जा सकता है
5. चूँकि गणित एक वैश्विक विषय है, अतः दूसरे देशों/क्षेत्रों के गणितीय स्रोतों को हमारे स्कूलों में आसानी से उपयोग किया जा सकता है/उनके मुताबिक ढाला जा सकता है।
6. पाठ्यसामग्री के अलावा अन्य स्रोतों की बड़ी संख्या, जैसे ऑडियो/वीडियो/ऐपलेट आदि
7. लागत का बहुत कम होना
8. शहरी और ग्रामीण (सरकारी स्कूलों समेत), दोनों तरह के स्कूलों में सूचना व संचार तकनीकों (आईसीटी) की पैठ का बढ़ना

शिक्षकों ने इस नए विचार को बहुत उत्साह के साथ ग्रहण किया है। यह सिर्फ नवीनता के कारण नहीं है बल्कि ऐसा काफी हद तक सम्भव है। निश्चित तौर पर, कई आलोचक हैं जो इनके इस्तेमाल को सही नहीं मानते हैं। इन स्रोतों को कक्षाओं में इस्तेमाल करने की प्रभाव क्षमता को समझने के लिए कई अध्ययन हुए हैं। इन अध्ययनों से प्राप्त कुछ आँकड़ों से उपयोगी जानकारियाँ व संकेत मिले हैं। अपितु, ये परिणाम अपने आप में निर्णायक नहीं हैं और इस महत्वपूर्ण क्षेत्र में अभी और शोध करने की आवश्यकता है।

डिजिटल स्रोत निश्चित रूप से किसी भी बच्चे के सीखने के सार्थक अनुभवों को बढ़ा सकते हैं। इन्हें खासतौर पर निम्नलिखित उद्देश्यों के लिए प्रयोग में लाया जा सकता हैः

1. किसी नए विषय का परिचय कराने में
2. महत्वपूर्ण अवधारणाओं के निर्माण में
3. बार–बार अभ्यास करवाने में
4. खुद से सीखने के लिए
5. समूहकार्य करते वक्त आदि।

यदि ये स्रोत शिक्षकों के पाठों के अध्यापन की योजना के अनुकूल हों तो वे अपनी कक्षाओं में इनका उपयोग कर सकते हैं ।

नीचे दी गई सूची से इंटरनेट पर उपलब्ध डिजिटल स्रोतों (अधिकतर निःशुल्क) के विस्तार का एक मोटा अनुमान लगाया जा सकता है। यह सूची सिर्फ परिचयात्मक है और किसी भी तरह से परिपूर्ण नहीं है। यह मुख्य रूप से सुझावों की तरह प्रयोग किए जाने के लिए है। पाठकों से अनुरोध है कि वे उनके कार्य में इनकी उपयोगिता के बारे में स्वयं ही निर्णय लें। मैं यहाँ पर यह अवश्य जोड़ना चाहूँगा कि मुझे ये स्रोत बहुत उपयोगी और मजेदार लगे हैं।

इन स्रोतों को कुछ श्रेणियों (मोटे तौर पर) में समूहबद्ध कर दिया गया है ताकि आपको मनमाफिक लिंक को खोजने में आसानी हो।

वेबसाइटें

सामान्य

द मैथफोरम @ ड्रैक्सल यूनिवर्सिटी
http://www.mathforum.org

द सेन्टर फॉर इन्नोवेशन इन मैथेमैटिक्स टीचिंग (सीआईएमटी)
http://www.cimt.plymouth.ac.uk

मैथ कैट्स – फ़न मैथ फॉर किड्स
http://www.mathcats.com] काउंट ऑन
http://www.counton.org

इल्यूमिनेशन्स – रिसोर्सेज़ फॉर टीचिंग मैथ्स
http://illuminations.nctm.org इंटरऐक्टिवेट
http://www.shodor.org/interactivate

गैड्सडेन मैथेमैटिक्स इनीशियेटिव
http://www2.gisd.k12.nm.us/GMIWebsite/IMathResources.html

मैथेमैटिकल इनीशियेटिव्ज़ – पज़ल्स, गेम्स, एण्ड अदर ऑनलाइन ऐजुकेशनल रिसोर्सेज़
http://mathematics.hellam.net

मैथनेट – इंटरऐक्टिव मैथेमैटिक्स इन ऐजुकेशन
http://www.mathsnet.net

नेशनल लाइब्रेरी ऑफ वर्चुअल मैनिपुलेटिव्ज़
http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

न्यूज़ीलैण्ड मैथ्स
http://www.nzmaths.co.nz

प्राइमरी रिसोर्सेज़ – मैथ्स
http://www.primaryresources.co.uk/maths/maths.html

प्रोटीचर! मैथ्स लैसन प्लान्स फॉर ऐलिमैंटरी स्कूलटीचर्स
http://www.proteacher.com/100000.html

मैथ्स ऐक्टिविटीज़
http://www.trottermath.net/contents.html

मैथ्स पावरपॉइंट्ज़
http://www.worldofteaching.com/mathspowerpoints.html

मैथ्स इज़ फन – मैथ्स रिसोर्सेज़
http://www.mathsisfun.com

मिडिल स्कूल पोर्टल फॉर मैथ्स एण्ड साइंस टीचर्स
http://www.msteacher.org/math

मैथ्स गेम्स, मैथ्स पज़ल्स एण्ड मैथ्स लैसंस – डिज़ाइन्ड फॉर किड्ज़ एण्ड फन
http://www.coolmath4kids.com

संख्या सम्बन्धी

मैजिक स्क्वैअर्स, मैजिक स्टार्स एण्ड अदर पैटर्न्स
http://recmath.org/Magic%20Squares

नम्बर रिक्रिएशन्स
http://www.shyamsundergupta.com

ब्रोकन कैलकुलेटर – मैथ्स इन्वैस्टीगेशन
http://www.woodlands-junior.kent.sch.uk/ maths/broken-calculator/index.html

कैलकुलेटर केऑस
http://www.mathplayground.com/Calculator_Chaos.html

प्राइमरी स्कूल न्यूमेरेसी
http://durham.schooljotter.com/coxhoe/Curriculum+Links/Numeracy

क्वार्क्स टू क्वेज़ार्स, पावर्स ऑफ 10
http://www.wordwizz.com/pwrsof10.html

बीजगणित

ऐलजेब्रा पज़ल
http://www.mathplayground.com/Algebra_Puzzle.html

ऐलजेब्रा टाइल्स
http://mathbits.com/MathBits/AlgebraTiles/AlgebraTilesMathBitsNew07ImpFree.html

जिओमैट्री
http://www.cyffredin.co.uk

द फ्रैक्टरी : ऐन इंटरऐक्टिव टूल फॉर क्रिएटिंग एण्ड ऐक्सप्लोरिंग फ्रैक्टल्स
http://library.thinkquest.org/3288/fractals.html

टैसेलेट
http://www.shodor.org/interactivate/activities/Tessellate

मैथस्फिअर – फ्री ग्राफ पेपर
http://www.mathsphere.co.uk/resources/MathSphereFreeGraphPaper.html

पेपर मॉडल्स ऑफ पॉलीहेड्रल
http://www.korthalsaltes.com

सवाल हल करने हेतु

मैथपज़ल
http://www.mathpuzzle.com

पज़लिंग वर्ल्ड ऑफ पॉलीहेड्रल डिसैक्शन्स
http://www.johnrausch.com/PuzzlingWorld/contents.html

इंटरऐक्टिव मैथेमैटिक्स मिसलैनी एण्ड पज़ल्स
http://www.cut-the-knot.org

पज़ल्स एण्ड प्रॉजैक्ट्स
http://www.delphiforfun.org/Programs/Indices/projectsIndex.html

10टिक्स डेली पज़ल पेज
http://www.10ticks.co.uk/s_dailyPuzzle.aspx

आर्कमिडीज़ लैबॉरेटरी – टीचर्स रिसोर्स : इम्प्रूव प्रॉब्लम सॉल्विंग स्किल्स
http://www.archimedes-lab.org/index_teachers.html

ब्रेन टीज़र्स
http://www.pedagonet.com/brain/brainers.html

जिम्नेज़ियम फॉर ब्रेन
http://www.gymnasiumforbrain.com

पज़ल्स एण्ड गेम्स
http://www.thinks.com

विविध

मैथेमैटिकल इमेजरी
http://www.josleys.com

द मैक्ट्यूटर हिस्ट्री ऑफ मैथेमैटिक्स आर्काइव
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history

मैथ कार्टून्स
http://www.trottermath.net/humor/cartoons.html

मैथ कॉमिक्स
http://home.adelphi.edu/~stemkoski/mathematrix/comics.html

मैथेमैटिकल कोटेशन सर्वर
http://math.furman.edu/~mwoodard/mqs/mquots.html

वोलफ्रैम मैथवर्ल्ड द वेब्स मोस्ट ऐक्सटैंसिव मैथेमैटिकल रिसोर्स
http://mathworld.wolfram.com

ऑप्टिकल इल्यूज़न्स एण्ड विजुअल फिनॉमिना
http://www.michaelbach.de/ot

ऑप्टिकल इल्यूज़न्स गैलरी
http://www.unoriginal.co.uk/optical5.html

टीचर्स रिसोर्सेज़ ऑनलाइन
http://www.cleavebooks.co.uk/trol/index.html

इंटरऐक्टिव रू ऐक्टिविटीज़
http://www.shodor.org/interactivate/activities/#fun

मैथ्स आर्टिकल्स
http://www.mathgoodies.com/articles

मैथ वड्ज़्‌ एण्ड सम अदर वड्ज़्‌ ऑफ इन्टरैस्ट
http://www.pballew.net/etyindex.html

पोर्ट्रेट्स ऑफ साइंटिस्ट्स एण्ड मैथेमैटीशियन्स
http://www.sil.si.edu/digitalcollections/hst/scientific-identity/CF/display_results.cfm?alpha_sort=R

लैट ऐप्सीलॉन < 0 http://epsilon.komplexify.com

ग्राण्ड इल्यूज़न्स
http://www.grand-illusions.com

पोर्ट्रेट गैलरी – मैथमैटीशियन्स
http://mathdl.maa.org/mathDL/46/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=2437&bodyId=2241

मैथ्स टीचिंग आइडियाज़
http://www.teachingideas.co.uk/maths/contents.html

ईबुक्स

इलस्ट्रेटेड मैथ्स फॉर्मुलाज़ – सलीम
http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/mathformulas.pdf

रामानुजन – द मैन बिहाइण्ड द मैथेमैटीशियन – सुन्दरेसन एण्ड पद्मविजयम
http://gyanpedia.in/tft/Resources/books/ramanujan.doc

ए मैथेमैटीशियन्स अपॉलॉजी – जी.एच. हार्डी
http://math.boisestate.edu/~holmes/holmes/A%20Mathematician%27s%20Apology.pdf

पज़ल मैथ्स – जी. गैमोव एण्ड स्टैर्न
http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/puzzlemath.pdf

– यूज़ेज़ ऑफ ए हंड्रेड स्क्वैअर 1000 ली मिल्ड्रैड बीअर्डज़्ली
http://www.mediafire.com/download.php?detnojrueje

जिओमैट्री कॉमिक बुक – ज्यां पियरे पेटिट
http://www.mediafire.com/?ud0nnnujzyy

ऐलिमैंट्स – यूक्लिड
http://www.mediafire.com/?ud0nnnujzyy

हाऊ चिल्ड्रन लर्न मैथेमैटिक्स
http://gyanpedia.in/tft/Resources/books/mathsliebeck.pdf

सजैस्टेड ऐक्सपैरिमैंट्स इन स्कूल मैथेमैटिक्स – जे.एन. कपूर
http://www.arvindguptatoys.com/arvindgupta/jnkapur.pdf

एस एन गणनाथ *पिछले दो दशकों से भी ज्यादा समय से स्कूली गणित से सम्बन्धित स्रोतों की रचना करने, उनके प्रमाणीकरण और प्रसार के कार्य में शामिल हैं। उनका यह दृढ़ विश्वास है कि किसी भी विषय में नवीन और प्रभावकारी कार्यविधियों व तरीकों से सीखने और शिक्षण का आनन्द प्राप्त किया जा सकता है और गणित इसका अपवाद नहीं है। वे सुविद्या – एक शैक्षणिक संसाधन केन्द्र जो मैसूर में स्थित है – के संस्थापक निदेशक हैं। उनसे* sngananath@gmail.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*

26 स्रोत सूची

निधि तिवारी और मधुमिता सुधाकर

यह स्रोत सूची किसी भी तरह से परिपूर्ण नहीं कही जा सकती। इसे शिक्षा के क्षेत्र में कार्यरत कई अलग–अलग लोगों की मदद से तैयार किया गया है, और हम इन सभी लोगों को इस कार्य के लिए अपना समय देने और प्रयास करने के लिए बहुत धन्यवाद देते हैं।

अ. बच्चों की गणित की किताबों के कुछ प्रसिद्ध प्रकाशक

क्र.	प्रकाशक का नाम	वेबसाइट
1	चिल्ड्रन्स बुक ट्रस्ट	www.childrensbooktrust.com
2	एकलव्य	http://eklavya.in/
3	फ्लिपकार्ट	www.flipkart.com
4	मैक्मिलन पब्लिशर्स	http://international.macmillan.com
5	नेशनल बुक ट्रस्ट	www.nbtindia.org.in
6	नेशनल काउन्सिल ऑफ ऐजुकेशनल रिसर्च एण्ड ट्रेनिंग	www.ncert.nic.in
7	नवनिर्मिती	http://www.navnirmiti.org/index.html
8	प्रथम बुक्स	www.prathambooks.org
9	स्कॉलैस्टिक इण्डिया पब्लिशिंग	www.scholasticindia.com/publishing.as
10	स्कूल ज़ोन पब्लिशिंग	www.schoolzone.com
11	द मैथेमैटिकल साइंसेज़ ट्रस्ट सोसाइटी	http://www.mstsindia.org/
12	विद्या भवन सोसाइटी	www.vidyabhawan.org
13	दिगन्तर खेल कूद सोसाइटी	
14	होमी भाभा सेन्टर फॉर साइंस ऐजुकेशन, मुम्बई	www.hbcse.tifr.res.in

ब. एकलव्य, भोपाल द्वारा शैक्षणिक संदर्भ पत्रिका में प्रकाशित, गणित पर आधारित कुछ लेख

शैक्षणिक संदर्भः अंक क्रमांक	लेख का शीर्षक	लेखक / लेखिका
1	मुझे डर लगता है गणित से	गंगा गुप्ता
2	कुछ बातें बीते ज़माने की	रोहित धनकर
4	झूठ, सफेद झूठ और आँकड़े	स्टीफन जे. गूल्ड
6	सवा छोटा, चौथाई बड़ा	माधव केलकर
10	क्या बोला क्या समझा	वेंणु ऐंडले
22–23	जादुई तालाब की पहेली	विजय शंकर वर्मा
28	ज्यामितीय आकृतियाँ	अभिषेक धर
33	परिधि का त्रिज्या से सम्बन्ध	जुई दधीच
40	कागज की कतरनें	प्रकाश बुरटे
51	मेरे हमसफर बनो	पी. के. श्रीनिवासन
52	स्कूली बच्चों को ऋणात्मक संख्याएँ पढ़ाना	जयश्री सुब्रम्णियन
53	श्रेणियाँ और अनन्त श्रेणियाँ	जयश्री सुब्रम्णियन
54	गणित कैसे रुचिकर बनाएँ	प्रमोद मैथिल
54	ऋणात्मक संख्याओं का गुणा	जयश्री सुब्रम्णियन
55	शून्य + शून्य+ शून्य...	जयश्री सुब्रम्णियन
57	स्थानीय मान और जोड़ सिखाने का प्रयास	कॉन्स्टेन्स कामी–लिण्डा जोसेफ
62	मेरी गणित की कक्षाएँ और सौरभ	मोहम्मद उमर

स. विद्या भवन ईआरसी द्वारा प्रकाशित पुस्तकों में छपे लेख

किताब का शीर्षक	लेख का शीर्षक	लेखक
कंस्ट्रक्शन ऑफ नॉलेज (हिन्दी में भी उपलब्ध)	अबाउट लर्निंग मैथेमैटिक्स	एच. के. दीवान और अशोक कुमार
	टीचिंग ऑफ मैथेमैटिक्स एट प्राइमरी स्टेज	एच. के. दीवान
	अबाउट लर्निंग मैथेमैटिक्स	एच. के. दीवान
	मैथेमैटिक्स: मैटेरियल्स एण्ड लैबॉरेटरीज़	एच. के. दीवान
मैटेरियल डेवेलप्मेंट फॉर	एलएमटी–01 सीरीज़, एएमटी–01 सीरीज	

द. ''प्राइमरी ऐजुकेशन खण्ड 2 जुलाई–सितम्बर 02'' में छपे लेख[1]

क्र.	लेख का शीर्षक	लेखक/लेखिका
1	अ वे टू ऐक्सप्लोर चिल्ड्रन्स अण्डरस्टैंडिंग ऑफ मैथेमैटिक्स	पद्मा एम. सारंगपाणी
2	ऐरर्स ऐज़ लर्निंग स्ट्रेटेजीज़	आर. के. अग्निहोत्री
3	रिफ्लैक्शन्स ऑन मैथेमैटिक्स टीचिंग	एच. के. दीवान
4	कॉमन ऐरर्स इन प्राइमरी स्कूल मैथेमैटिक्स?	एच. सी. प्रधान
5	डज़ द चाइल्ड नो ऐनी मैथेमैटिक्स	एच. के. दीवान
6	इंटरकल्चरल मैथेमैटिक्स ऐजुकेशन इन पेरू	योकिम श्रोडर
7	हाऊ मैथेमैटिकल आइडियाज़ ग्रो – ऐन ऐक्सट्रेक्ट	इग्नू की एएमटी श्रंखला
8	व्हाय हैव अ लैबॉरेटरी फॉर मैथेमैटिक्स?	रोहित धनकर
9	मैथ फोबिया अमंग टीचर्स एण्ड चिल्ड्रन: ग्लिप्सेज़ फ्रॉम अ सर्वे	एस. एन. गणनाथ और सी. श्रीनाथ
10	द मीट्रिक मेला, अ सैलीब्रेशन ऑफ मैज़रमैंट इन कर्नाटक	के. एम. शेषागिरी
11	टीचिंग ट्राइबल चिल्ड्रन मैथेमैटिक्स थ्रू रियल कॉन्टैक्स्ट्स	बिनय कृष्ण पटनायक

[1]लेख मूल हिन्दी में उपलब्ध हैं।

ई. गणित–शिक्षा के क्षेत्र में कार्य कर रहे कुछ गैर–सरकारी संगठन

- एकलव्य, भोपाल
- होमी भाभा सेन्टर फॉर साइंस ऐजुकेशन, मुम्बई
- जोड़ो ज्ञान, दिल्ली
- नवनिर्मिती, मुम्बई
- शिशु मिलाप, वड़ोदरा
- सुविद्या, मैसूर
- विद्या भवन सोसाइटी, उदयपुर

फ. www.arvindguptatoys.com पर गणित की कई किताबें/प्रकाशन उपलब्ध हैं। उदाहरण के लिए, इस साइट पर उपलब्ध कुछ किताबें हैं, 'इलस्ट्रेटेड मैथ्स फॉर्मुलाज़', 'जिओमैट्री फॉर किड्ज़', 'मैथ वन्डर्स' आदि। हम पाठकों को यह साइट देखने के लिए आमंत्रित करते हैं।

ग. गणित सीखने को मजेदार बनाने वाली कुछ वेबलिंक:

1. http://www.mathcelebration.com/index.html
2. http://www.artofproblemsolving.com/
3. http://www.noetic-learning.com/others.jsp
4. http://cte.jhu.edu/techacademy/web/2000/heal/siteslist.html
5. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/
6. http://vedicmathsindia.blogspot.com/

7. http://www.vedicmathsindia.org/
8. http://www.teach-nology.com/gold/basicword.html
9. http://www.mathplayground.com
10. http://www.math.com
11. http://www.mathsisfun.com
12. http://www.coolmath4kids.com
13. http://www.mathcats.com
14. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BirthplaceMaps/Countries/India.html
15. http://www.teachingideas.co.uk/maths/contents.html
16. http://www.playkidsgames.com/mathGames.html

हुजूर इस गरीब गणितज्ञ की बकाया राशि कब मिलेगी। क्या आप जानते हैं कि मैं इसके लिए आपके दफ्तर के 34.16 किलोमीटर प्रति महीने की दर से अब तक कुल 338.472 किलोमीटर के चक्कर लगा चुका हूँ।



अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन

134, डोड्डाकन्नेल्ली, विप्रो कॉरपोरेट ऑफिस के बाजू में, सरजापुर रोड, बंगलौर 560 035, भारत
दूरभाष : 91 - 80 - 6614900/01/02 फैक्स : 91 - 80 - 66144903 E-mail : learningcurve@azimpremjifountation.org
वेबसाइट : www.azimpremjifountation.org